

第 2 章 线性规划

修贤超

上海大学自动化系

<https://xianchaoxiu.github.io>

- 2.1 基本概念
- 2.2 图解法
- 2.3 解与凸集
- 2.4 单纯形法
- 2.5 对偶问题

例 1

- 某公司计划制造 I、II 两种家电产品。已知各制造一件时分别占用的设备 A、设备 B 的台时、调试工序时间及每天可用于这两种家电的能力、各售出一件时的获利情况

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 问该公司应制造两种家电各多少件, 使获取的利润为最大

例 1

- 设两种家电产量分别为 x_1, x_2 , 于是

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量: x_1, x_2
- 目标函数: $\max z = 2x_1 + x_2$
- 约束条件: $5x_2 \leq 15, 6x_1 + 2x_2 \leq 24, x_1 + x_2 \leq 5, x_1, x_2 \geq 0$

例 2

- 某公司拟在下一年度的 1-4 月的 4 个月内租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积

月份	1	2	3	4
所需仓库面积 ($100m^2$)	15	10	20	12

仓库租借费用随合同期限而定, 合同期越长折扣越大。租借仓库的合同每月初都可办理, 每份合同具体规定租用面积和期限

合同租借期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内的租费 (元/ $100m^2$)	2800	4500	6000	7300

- 试确定该公司签订租借合同的最优决策, 使所付租借费用最小

例 2

- 设 x_{ij} 表示在第 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 个月初签订的租借期为 j ($j = 1, 2, 3, 4$) 个月的仓库面积的合同

- 决策变量: x_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$)

- 目标函数:

$$\begin{aligned} \min z = & 2800(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 4500(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\ & + 6000(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) + 7300(x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44}) \end{aligned}$$

- 约束条件:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 15 \\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 10 \\ x_{13} + x_{14} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} \geq 20 \\ x_{14} + x_{23} + x_{32} + x_{41} \geq 12 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

课堂练习 1

- 某工厂用三种原料 P_1 、原料 P_2 、原料 P_3 生产三种产品 Q_1 、产品 Q_2 、产品 Q_3 ，如表所示

单位产品所需原料数量	产品 Q_1	产品 Q_2	产品 Q_3	原料可用量
原料 P_1 /公斤	2	3	0	1500
原料 P_2 /公斤	0	2	4	800
原料 P_3 /公斤	3	2	5	2000
位产品的利润/千元	3	5	4	

- 试制订总利润最大的生产计划

课堂练习 1 (答案)

■ 设每天生产三种产品的数量, 分别设为 x_1, x_2, x_3 , 于是

□ 决策变量: x_1, x_2, x_3

□ 目标函数: $\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$

□ 约束条件: $2x_1 + 3x_2 \leq 1500, 2x_2 + 4x_3 \leq 800, 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

■ 数学模型为

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划问题的数学模型

- 三要素: 决策变量, 目标函数, 约束条件

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量的取值是连续的
- 目标函数是决策变量的线性函数
- 约束条件是含决策变量的线性等式或不等式

线性规划问题的数学模型

■ 一般形式

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- x_j : 决策变量
- c_j : 价值系数
- b_i : 资源量/右端项
- a_{ij} : 技术系数/工艺系数

线性规划问题的数学模型

■ 线性规划问题的数学模型

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & z = \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (=, \geq) b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划问题的数学模型

■ 记

$$\mathbf{C} = [c_1 \dots c_n] \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

■ 用向量和矩阵表示

$$\max(\min) \ z = \mathbf{CX}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j x_j \leq (=, \geq) \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

$$\max(\min) \ z = \mathbf{CX}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \mathbf{AX} \leq (=, \geq) \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

■ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

- 目标函数求最大值
- 所有约束条件均用等式表示
- 所有决策变量均取非负数
- 所有右端项常数均为非负数

非标准型转化为标准形式

■ 非标准型

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 基本思路

目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

■ 第一步：目标函数的转换

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \max z' = - \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

非标准型转化为标准形式

■ 第二步: 约束条件的转换

□ 右端项常数的转换

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad b_i < 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = -b_i$$

□ 不等式的转换——引入松弛变量

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

□ 不等式的转换——引入剩余变量

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

非标准型转化为标准型

■ 第三步: 决策变量的转换

□ 取值无约束的转化

$$x_k \text{ 取值无约束} \Rightarrow x_k = x'_k - x''_k, \quad x'_k, x''_k \geq 0$$

□ 取值非正的转化

$$x_k \leq 0 \Rightarrow x'_k = -x_k$$

这里 x'_k, x''_k 为任意非负数, 不是导数

例 3

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

- 第一步：目标函数的转换
- 第二步：约束条件的转换
- 第三步：决策变量的转换

第一步：目标函数的转换

■ 令 $z' = -z$, 于是

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

第二步: 约束条件的转换

■ 右端项常数的转换

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

■ 不等式的转换, 松弛变量 x_4 , 剩余变量 x_5

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_4, x_5 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

第三步：决策变量的转换

■ 令 $x_3 = x'_3 - x''_3$, $x'_3, x''_3 \geq 0$

$$\max z' = -x_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

■ 令 $x'_1 = -x_1$, 于是

$$\max z' = x'_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ 3x'_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ 4x'_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

■ 标准型通常记为

$$\max z' = x'_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ 3x'_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ 4x'_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\max z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_6 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

课堂练习 2

- 请将下式转化为线性规划标准形式

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

课堂练习 2 (答案)

■ 线性规划标准形式为

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{取值无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 线性规划问题的标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

■ 三要素：决策变量, 目标函数, 约束条件

■ 非标准型转化为标准形式

目标函数 $\Rightarrow$ 约束条件 $\Rightarrow$ 决策变量

■ 课后作业：习题 2.1

- 2.1 基本概念
- 2.2 图解法
- 2.3 解与凸集
- 2.4 单纯形法
- 2.5 对偶问题

线性规划问题的数学模型

■ 标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

- 满足约束条件的 x_j ($j = 1, \dots, n$) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 使目标函数达到最优的可行解称为**最优解**

■ 只有两个变量的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数
- 第四步: 确定最优解

例 1

■ 用图解法求解线性规划问题

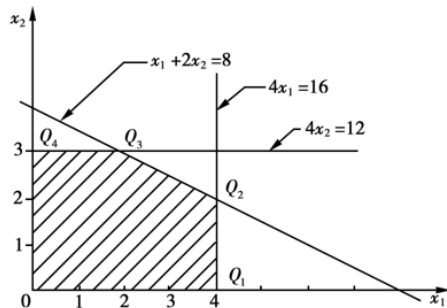
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 决策变量: x_1, x_2
- 目标函数: $\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$
- 约束条件: $x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 16, 4x_2 \leq 12, x_1, x_2 \geq 0$

具体步骤

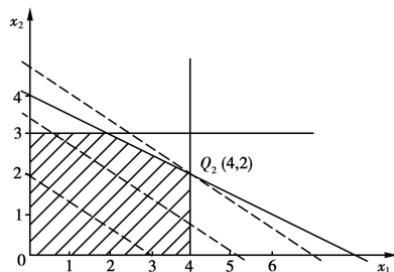
- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



具体步骤

- 第一步: 建立平面直角坐标系
- 第二步: 图示约束条件, 找出可行域
- 第三步: 图示目标函数 $\max z = 2x_1 + 3x_2$

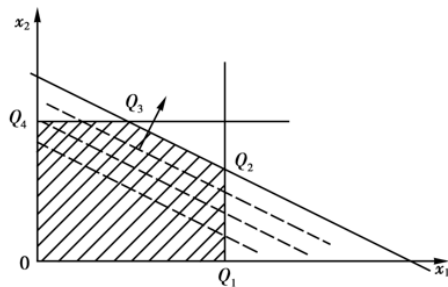


- 第四步: 确定最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2$, 最优值为 $z^* = 14$

无穷多最优解

■ 目标函数的直线族与约束条件平行

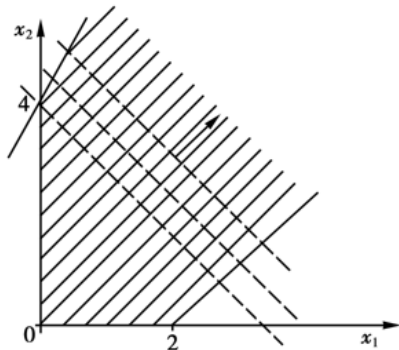
$$\begin{array}{ll}\max & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$



无界解

- 建立数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件

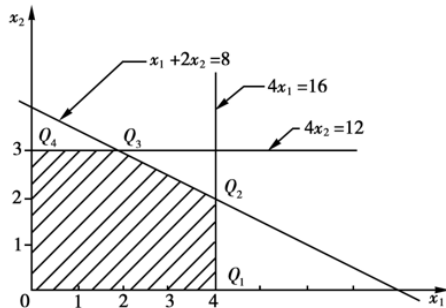
$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



无可行解

- 当存在矛盾的约束条件时会出现无可行域

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



课堂练习 1

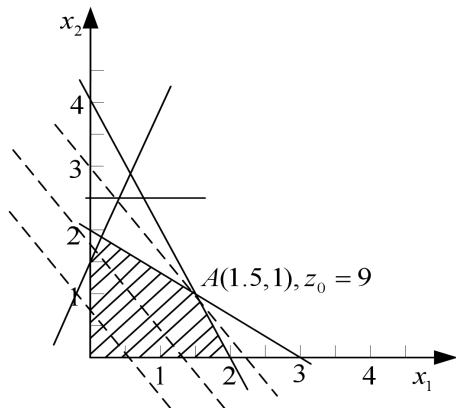
■ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

课堂练习 1 (答案)

■ 用图解法求解线性规划问题

$$\begin{array}{ll}\max & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$



- 若线性规划问题的可行域存在, 则可行域是一个凸集
- 若线性规划问题的最优解存在, 则最优解一定是凸集的某个顶点
- 解题思路
 - 先找出凸集的任一顶点, 计算在顶点处的目标函数值
 - 比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大, 如果为否, 则该顶点就是最优解的点, 否则转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点
 - 重复上述过程, 一直到找出使目标函数值达到最大的顶点为止

小结

- 图解法仅求解两个变量的线性规划问题
- 解的存在性
 - 唯一解
 - 无穷多解
 - 无界解
 - 无解/无可行解
- 课后作业: 习题 2.2

- 2.1 基本概念
- 2.2 图解法
- 2.3 解与凸集
- 2.4 单纯形法
- 2.5 对偶问题

■ 标准形式

$$(LP) \quad \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) & (1.2) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) & (1.3) \end{cases}$$

- 满足约束条件 (1.2) 和 (1.3) 的 x_j ($j = 1, \dots, n$) 称为**可行解**
- 全部可行解的集合称为**可行域**
- 满足 (1.1) 的可行解称为**最优解**
- 最优解所对应的函数值称为**最优值**

解的概念

- 设 A 为约束方程组 (1.2) 的 $m \times n$ ($n > m$) 阶系数矩阵, 其秩为 m , B 是矩阵 A 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵, 记为

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, \cdots, P_m)$$

- B 是线性规划问题 (LP) 的一个**基**
- B 中的每一个列向量 P_j ($j = 1, \cdots, m$) 称为**基向量**
- 与基向量 P_j 对应的变量 x_j 称为**基变量**, 记为 $X_B = (x_1, \cdots, x_m)^T$
- 除基变量以外的变量称为**非基变量**, 记为 $X_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)^T$

例 1

- 找出线性规划问题的基、基向量和基变量

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 70x_1 + 120x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 1

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 寻找阶为 m 的满秩子矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4, x_5)^\top$, 非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2)^\top$

例 1

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 另一个基为

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$$

基变量为 $\mathbf{X}_B = (x_2, x_4, x_5)^\top$, 非基变量为 $\mathbf{X}_N = (x_1, x_3)^\top$

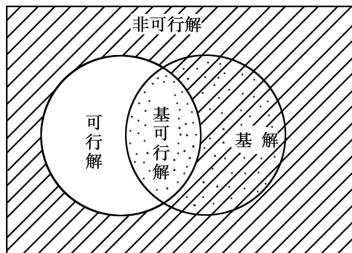
解的概念

- 在 (1.2) 中, 令所有非基变量 $x_{m+1}, \dots, x_n$ 等于 0, 则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为线性规划问题 (LP) 的**基解**

- 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为**基可行解**
- 对应于基可行解的基称为**可行基**



例 2

- 求出全部基解, 指出其中的基可行解, 并确定最优解

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 写出技术系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 2

■ 全部基解见下表

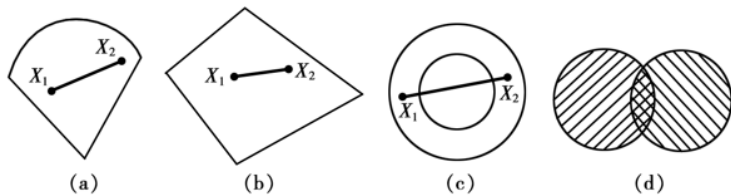
序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	基可行解
①	0	0	5	10	4	5	✓
②	0	4	5	2	0	17	✓
③	5	0	0	5	4	10	✓
④	0	5	5	0	-1	20	×
⑤	10	0	-5	0	4	15	×
⑥	5	2.5	0	0	1.5	17.5	✓
⑦	5	4	0	-3	0	22	×
⑧	2	4	3	0	0	19	✓

■ 最优解为 $\mathbf{X} = (2, 4, 3, 0, 0)^\top$, 最优值为 $z^* = 19$

凸集

- 对于任意两点 $X_1, X_2 \in \Omega$, 满足下式的集合 Ω 称为**凸集**

$$\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$



- 对于凸集 Ω 中的点 X , 如果不存在 $X_1, X_2 \in \Omega$ 使得

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 \in \Omega \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 X 是凸集 Ω 的**顶点 (极点)**

几个基本定理

■ **定理 1** 若线性规划问题存在可行解, 则可行域是凸集

证明 记 Ω 为满足线性规划问题束条件的集合

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

设 Ω 内的任意两点为

$$\mathbf{X}_1 = (x_{11}, \cdots, x_{1n})^\top, \quad \mathbf{X}_2 = (x_{21}, \cdots, x_{2n})^\top$$

且 $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$, 一定满足

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{1j} = \mathbf{b}, \quad x_{1j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} = \mathbf{b}, \quad x_{2j} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

几个基本定理

证明 (续) 令 $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ 为 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 连线上任意一点, 即

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{X}_2 \quad (0 < \alpha < 1)$$

其中 $x_j = \alpha x_{1j} + (1 - \alpha) x_{2j}$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j (\alpha x_{1j} + (1 - \alpha) x_{2j}) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{1j} + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} - \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j x_{2j} \\ &= \alpha \mathbf{b} + \mathbf{b} - \alpha \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

考虑 $x_{1j}, x_{2j} \geq 0, \alpha > 0, 1 - \alpha > 0$, 可知 $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), 证毕

几个基本定理

- **引理** 线性规划问题的可行解 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的

证明 (必要性) 由基可行解的定义可知

在 (1.2) 中, 令所有非基变量 $x_{m+1}, \dots, x_n$ 等于 0, 则称

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为线性规划问题的基解, 满足变量非负约束条件 (1.3) 的基解称为基可行解

几个基本定理

证明 (续) (充分性) 若向量 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$ 线性独立, 则必有 $k \leq m$

(1) 当 $k = m$ 时, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$ 恰构成一个基, 从而

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top$$

为相应的基可行解

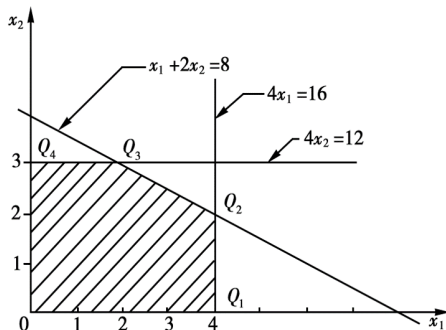
(2) 当 $k < m$ 时, 则可以从其余的列向量中取出 $m - k$ 个与

$$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$$

构成最大的线性独立向量组, 其对应的解恰为 $\mathbf{X}$, 根据定义它是基可行解

几个基本定理

- **定理 2** 线性规划问题的基可行解 X 对应线性规划问题可行域 (凸集) 的顶点
- **定理 3** 若线性规划问题有最优解, 那么一定存在一个基可行解是最优解
- **定理 4** 可行域有界, 目标函数最优值必可在顶点得到



课堂练习 1

- 试证明定理 3, 即

若线性规划问题有最优解, 那么一定存在一个基可行解是最优解

课堂练习 1 (答案)

证明 设 $\mathbf{X}^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^\top$ 是线性规划问题的一个最优解, 那么

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} = \sum_{j=1}^n c_j x_j^0$$

是目标函数的最大值

若 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不是基可行解, 由定理 2 知 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不是顶点, 一定能在可行域内找到通过 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的直线上的另外两个点

$$(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) \geq 0 \quad \text{和} \quad (\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta) \geq 0$$

将这两个点带入目标函数有

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} + \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}\mu\delta$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^{(0)} - \mu\delta) = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{C}\mu\delta$$

课堂练习 1 (答案)

证明 (续) 因 $CX^{(0)}$ 为目标函数的最大值, 故有

$$CX^{(0)} \geq CX^{(0)} + C\mu\delta$$

$$CX^{(0)} \geq CX^{(0)} - C\mu\delta$$

由此 $C\mu\delta = 0$, 即有

$$C(X^{(0)} + \mu\delta) = CX^{(0)} = C(X^{(0)} - \mu\delta)$$

如果 $(X^{(0)} + \mu\delta)$ 或 $(X^{(0)} - \mu\delta)$ 仍不是基可行解, 按照上面的方法继续做下去, 最终一定可以找到一个基可行解, 其目标函数值等于 $CX^{(0)}$, 证毕

■ 解的概念

- 可行解, 可行域, 最优解
- 基, 基解, 基可行解, 可行基
- 凸集, 顶点

■ 解的性质

- 所有可行解构成的集合是凸集
- 每个基可行解对应可行域的一个顶点
- 若有最优解, 则必在顶点上得到

- 2.1 基本概念
- 2.2 图解法
- 2.3 解与凸集
- 2.4 单纯形法
- 2.5 对偶问题

- 先找出一个基可行解, 判断其是否为最优解, 如果否, 则转换到相邻的基可行解, 并使目标函数值不断增大, 一直找到最优解为止
- 迭代步骤
 - 第一步: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表
 - 第二步: 最优性检验
 - 第三步: 从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解, 列出新的单纯形表
 - 第四步: 重复二、三步, 一直到计算结束为止
- **单纯形表:** 为检验一个基可行解是否最优, 需要将其目标函数值与相邻基可行解的目标函数值进行比较

第一步：列出初始单纯形表

■ 考虑线性规划问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

■ 系数矩阵的增广矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

第一步：列出初始单纯形表

- 选取 $m \times m$ 的单位矩阵作为可行基, 得到初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}
$c_j - z_j$			0	$\cdots$	0	$\cdots$	σ_j	$\cdots$	σ_n

- 检验数 $\sigma_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$

第一步：列出初始单纯形表

■ 例 1

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 标准化

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

第一步：列出初始单纯形表

■ 系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ 列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

第二步：最优性检验

- 如果所有检验数

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} \leq 0$$

且基变量中不含有人工变量, 则停止, 得到最优解

- 如果存在

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} > 0$$

且有 $P_j \leq 0$, 则停止迭代, 问题为无界解

- 否则转三步

第二步：最优性检验

■ 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	6	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

- 检验数 $\sigma_j > 0$, 因此初始基可行解不是最优解
- 按照单纯形法转第三步

第三步：基可行解转化

- 从一个基可行解转换到相邻的目标函数更大的基可行解，列出新的单纯形表

- 确定换入变量 x_k (**最大增加原则**)

$$\sigma_k = \max_j \{ \sigma_j \mid \sigma_j > 0 \}$$

- 确定换出变量 x_l (**最小比值原则**)

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定 x_l 为换出变量, a_{lk} 为主元素

第三步: 基可行解转化

- 用换入变量 x_k 替换基变量中的换出变量 x_l , 得到一个新的基

$$(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{l-1}, \mathbf{P}_k, \mathbf{P}_{l+1}, \dots, \mathbf{P}_m)$$

进行初等变换

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{l,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消元}} \mathbf{P}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

第三步：基可行解转化

■ 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	$\underline{x_4}$	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

- 因 $\sigma_1 > \sigma_2$, 确定 x_1 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ \infty, \frac{24}{6}, \frac{5}{1} \right\} = 4$, 确定 6 为主元素
- x_4 为换出变量

第四步：重复二、三步

■ 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_1	4	1	2/6	0	1/6	0
0	$\underline{x_5}$	1	0	[4/6]	0	-1/6	1
$c_j - z_j$			0	1/3	0	-1/3	0

□ 因 $\sigma_2 > 0$, 确定 x_2 为换入变量

□ $\theta = \min \left\{ \frac{15}{5}, \frac{4}{2/6}, \frac{1}{4/6} \right\} = \frac{6}{4}$, 确定 4/6 为主元素

□ x_5 为换出变量

第四步：重复二、三步

■ 例 1

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
2	x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
1	x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
$c_j - z_j$			0	0	0	-1/4	-1/2

- 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到最优解 $\mathbf{X} = (7/2, 3/2, 15/2, 0, 0)^\top$
- 代入目标函数得最优值 $z^* = 2x_1 + x_2 = 17/2$

例 2

■ 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 标准化

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 2

- 第一步: 求初始基可行解, 列出初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	12	0	4	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

- 第二步: 检验数大于零, 因此初始基可行解不是最优解

例 2

■ 第三步: 基可行解的转换

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	$\underline{x_2}$	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	$\underline{x_5}$	12	0	[4]	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

- 因 $\sigma_2 > \sigma_1$, 确定 x_2 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ \frac{8}{2}, \infty, \frac{12}{4} \right\} = 3$, 确定 4 为主元素
- x_5 为换出变量

例 2

■ 具体过程

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1
$c_j - z_j$			2	3	0	0	0

⇓

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	1	0	1	0	-1/2
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4
$c_j - z_j$			2	0	0	0	-3/4

例 2

■ 第四步: 重复二、三步

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\underline{x_3}$	2	[1]	0	1	0	-1/2
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4
$c_j - z_j$			2	0	0	0	-3/4

- 因 $\sigma_1 > 0$, 确定 x_1 为换入变量
- $\theta = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{16}{4}, \infty \right\} = 2$, 确定 1 为主元素
- x_3 为换出变量

例 2

■ 具体过程

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	$\underline{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\underline{x_3}$	2	[1]	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			2	0	0	0	$-3/4$

↓

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	x_4	8	0	0	-4	1	2
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

例 2

■ 第四步: 重复二、三步

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

□ 因 $\sigma_5 > 0$, 确定 x_5 为换入变量

□ $\theta = \min \left\{ -\frac{8}{2}, \frac{3}{1/4} \right\} = 4$, 确定 2 为主元素 (为什么不能选 $-1/2$)

□ x_4 为换出变量

例 2

■ 具体过程

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$
0	$\underline{x_4}$	8	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	$1/4$
$c_j - z_j$			0	0	-2	0	$1/4$

$\Downarrow$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	$1/4$	0
0	x_5	4	0	0	-2	$1/2$	1
3	x_2	2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0
$c_j - z_j$			0	0	$-3/2$	$-1/8$	0

例 2

■ 第四步: 重复二、三步

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
$c_j - z_j$			0	0	-3/2	-1/8	0

- 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到最优解
- 最优解 $X = (4, 2, 0, 0, 4)^\top$
- 最优值 $z^* = 2x_1 + 3x_2 = 14$

课堂练习 1

■ 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 50x_1 + 100x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 300 \\ 2x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_2 \leq 250 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

课堂练习 1 (答案)

■ 经过分析得到

$c_j \rightarrow$			50	100	0	0	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{x_5}$
50	x_1	50	1	0	1	0	-1
0	x_4	50	0	0	-2	1	1
100	x_2	250	0	1	0	0	1
$c_j - z_j$			0	0	-50	0	-50

■ 所有检验数 $\sigma_j \leq 0$, 得到唯一最优解

■ 最优解 $X = (50, 250, 0, 50, 0)^\top$

■ 最优值 $z^* = 50x_1 + 100x_2 = 27500$

■ 考虑求解线性规划问题

$$\max z = -3x_1 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

■ 添加人工变量 x_6, x_7

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

大 M 法

■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0	$-M$	$-M$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
$-M$	x_6	1	-2	$[1]$	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			$-3 - 2M$	$4M$	1	0	$-M$	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	6	$[6]$	0	4	0	3	-3	1
$c_j - z_j$			$-3 + 6M$	0	$1 + 4M$	0	$3M$	$-4M$	0

大 M 法

■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0	$-M$	$-M$
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	0	0	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	x_2	3	0	1	$1/3$	0	0	0	$1/3$
-3	x_1	1	1	0	$[2/3]$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/6$
$c_j - z_j$			0	0	3	0	$3/2$	$-3/2 - M$	$1/2 - M$
0	x_4	0	0	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
0	x_2	$5/2$	$-1/2$	1	0	0	$-1/4$	$1/4$	$1/4$
1	x_3	$3/2$	$3/2$	0	1	0	$3/4$	$-3/4$	$1/4$
$c_j - z_j$			$-9/2$	0	0	0	$-3/4$	$3/4 - M$	$-1/4 - M$

例 3

■ 用大 M 法求解线性规划问题

$$\begin{array}{ll}\max & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 = 14 \\ x_2 \geq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}\end{array}$$

例 3

■ 标准化, 增加人工变量

$$\begin{aligned} \max z = & 6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t. } & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 120 \\ x_1 + x_6 = 14 \\ x_2 - x_5 + x_7 = 22 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 3

■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			6	4	0	0	0	$-M$	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_3	100	2	3	1	0	0	0	0
0	x_4	120	4	2	0	1	0	0	0
$-M$	x_6	14	[1]	0	0	0	0	1	0
$-M$	x_7	22	0	1	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			$M + 6$	$M + 4$	0	0	$-M$	0	0
0	x_3	72	0	3	1	0	0	-2	0
0	x_4	64	0	2	0	1	0	-4	0
6	x_1	14	1	0	0	0	0	1	0
$-M$	x_7	22	0	[1]	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			0	$M + 4$	0	0	$-M$	$-6 - M$	0

例 3

■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			6	4	0	0	0	$-M$	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_3	6	0	0	1	0	[3]	-2	-3
0	x_4	20	0	0	0	1	2	-4	-2
6	x_1	14	1	0	0	0	0	1	0
4	x_2	22	0	1	0	0	-1	0	1
$c_j - z_j$			0	0	0	0	4	$-6 - M$	$-4 - M$
0	x_5	2	0	0	1/3	0	1	-2/3	-1
0	x_4	16	0	0	-2/3	1	0	-8/3	0
6	x_1	14	1	0	0	0	0	1	0
4	x_2	24	0	1	1/3	0	0	-2/3	0
$c_j - z_j$			0	0	-4/3	0	0	$-10/3 - M$	$-M$

两阶段法

■ 对于标准形式线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

■ 引入辅助问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j, y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

两阶段法

- **第一阶段：采用单纯形法求解，求解辅助问题**

当人工变量取值为 0 时，目标函数值也为 0。这时候的最优解就是原线性规划问题的一个基可行解。如果第一阶段求解结果最优解的目标函数值不为 0，也即最优解的基变量中含有非零的人工变量，表明原线性规划问题无可行解

- **第二阶段：在第一阶段已求得原问题的一个初始基可行解的基础上，再求原问题的最优解**

对第一阶段的最优单纯形表稍加改动，首先把第一行的价值向量替换成原问题的价值向量，人工变量全部从表中去掉，然后继续用单纯形法计算

- **原问题有可行解时，辅助问题最优值为 0**

例 4

■ 求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 大 M 法

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 4

■ 第一阶段

$$\begin{aligned} \min w &= x_6 + x_7 \quad (\max w' = -x_6 - x_7) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 第二阶段

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 4

■ 第一阶段

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	-1	-1
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
-1	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
-1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			-2	4	0	0	-1	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
-1	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
$c_j - z_j$			6	0	4	0	3	-4	0
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6
$c_j - z_j$			0	0	0	0	0	-1	-1

例 4

■ 第二阶段

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	$-1/2$
0	x_2	3	0	1	$1/3$	0	0
-3	x_1	1	1	0	$[2/3]$	0	$1/2$
$c_j - z_j$			0	0	3	0	$3/2$
0	x_4	0	0	0	0	1	$-1/2$
0	x_2	$5/2$	$-1/2$	1	0	0	$-1/4$
1	x_3	$3/2$	$3/2$	0	1	0	$3/4$
$c_j - z_j$			$-9/2$	0	0	0	$-3/4$

单纯形法计算中的几个问题

- 当所有 $\sigma_j \leq 0$, 且某个非基变量的检验数为 0 时, 那么线性规划问题有无穷多最优解 (见例 3)
- 当结果出现所有 $\sigma_j \leq 0$ 时, 如基变量中仍含有非零的人工变量(两阶段法求解时第一阶段目标函数值不等于零), 表明问题无可行解 (见例 4)
- 当目标函数求极小化时, 解的判别以 $\sigma_j \geq 0$ 作为判别最优解的标准 (见例 5)

例 5: 无穷多解

■ 考虑求解线性规划问题

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

例 5: 无穷多解

■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			1	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	3	0	[1]	0	1	0
0	x_5	8	1	2	0	0	1
$c_j - z_j$			1	2	0	0	0
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_2	3	0	1	0	1	0
0	x_5	2	[1]	0	0	-2	1
$c_j - z_j$			1	0	0	-2	0

例 5: 无穷多解

■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			1	2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	0	0	1	[2]	-1
2	x_2	3	0	1	0	1	0
1	x_1	2	1	0	0	-2	1
$c_j - z_j$			0	0	0	0	-1
0	x_4	1	0	0	[1/2]	1	-1/2
2	x_2	2	0	1	-1/2	0	1/2
1	x_1	4	1	0	1	0	0
$c_j - z_j$			0	0	0	0	-1

■ $X_1 = (2, 3, 2, 0, 0)^\top$, $X_2 = (4, 2, 0, 1, 0)^\top, \dots$

例 6: 无可行解

■ 考虑求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 6: 无可行解

■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	[1]	1	1	0	0
$-M$	x_5	6	2	2	0	-1	1
$c_j - z_j$			$2 + 2M$	$1 + 2M$	0	$-M$	0
2	x_1	2	1	1	1	0	0
$-M$	x_5	2	0	0	-2	-1	1
$c_j - z_j$			0	-1	$-2 - 2M$	$-M$	0

■ 当所有 $\sigma_j \leq 0$ 时, 基变量中仍含有非零的人工变量 $x_5 = 2$, 故无可行解

例 7: 极小化

■ 考虑求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 7: 极小化

■ 用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			1	-1	1	0	-3	0
$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_3	6	0	1	1	-1	2	0
1	x_1	5	1	2	0	-2	0	0
0	x_6	8	0	2	0	1	[3]	1
$c_j - z_j$			0	-4	0	3	-5	0
1	x_3	2/3	0	-1/3	1	-5/3	0	-2/3
1	x_1	5	1	[2]	0	-2	0	0
-3	x_5	8/3	0	2/3	0	1/3	1	1/3
$c_j - z_j$			0	-2/3	0	14/3	0	5/3

单纯形法的进一步讨论

■ 用单纯形法求解 (续)

$c_j \rightarrow$			1	-1	1	0	-3	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_3	3/2	1/6	0	1	-2	0	-2/3
-1	x_2	5/2	1/2	1	0	-1	0	0
-3	x_5	1	-2/3	0	0	1	1	1/3
$c_j - z_j$			1/3	0	0	4	0	5/3

■ 最优解 $X = (0, 5/2, 3/2, 0, 1)^\top$

■ 最优值 $z^* = -4$

单纯形法计算中的几个问题

- 按最小比值 θ 来确定换出基的变量时, 有时出现存在两个以上相同的最小比值, 从而使下一个表的基可行解中出现一个或多个基变量等于零的**退化解**
- 退化解的出现原因是模型中存在多余的约束, 使多个基可行解对应同一顶点
- 当存在退化解时, 就有可能出现迭代计算的循环
- **解决办法**
 - 当存在多个 $\sigma_j > 0$ 时, 始终选取中下标值为**最小**的变量作为换入变量
 - 当计算 θ 值出现两个以上相同的最小比值时, 始终选取下标值为**最小**的变量作为换出变量

课堂练习 2

- 已知初始单纯形表和用迭代后单纯形法, 试求括弧中的值

项目		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	6	(b)	(c)	(d)	1	0
x_5	1	-1	3	(e)	0	1
$c_j - z_j$		(a)	-1	2	0	0
x_1	(f)	(g)	2	-1	1/2	0
x_5	4	(h)	(i)	1	1/2	1
$c_j - z_j$		0	-7	(j)	(k)	(l)

■ 用大 M 法求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

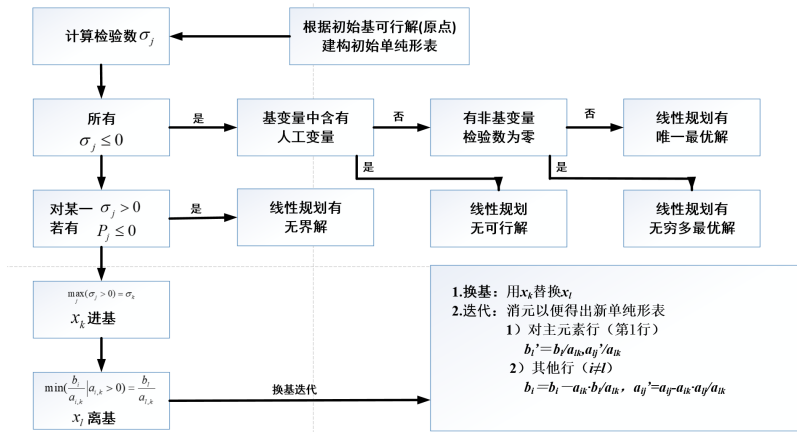
课堂练习 3 (答案)

- 标准化并添加人工变量后得到

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s.t. } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, 7) \end{cases} \end{aligned}$$

- 最优解 $\mathbf{X} = (4, 1, 9)^\top$, 最优值 $z^* = -2$

■ 单纯形法计算步骤



■ 课后作业: 习题 2.3

- 2.1 基本概念
- 2.2 图解法
- 2.3 解与凸集
- 2.4 单纯形法
- 2.5 对偶问题

例 1

- 某公司计划制造 I、II 两种家电产品, 已知各制造一件时分别占用的设备 A、设备 B、调试工序时间及每天的能力、各售出一件时的获利情况

项目	产品 I	产品 II	每天可用能力
设备 A/h	0	5	15
设备 B/h	6	2	24
调试工序/h	1	1	5
利润/元	2	1	

- 如果公司不再安排生产, 而是将设备 A、设备 B 和调试工序这三种能力资源出租, 如何确定各种资源的租价才能获得最大利润

对偶问题的提出

- **决策变量** 设 y_1, y_2, y_3 为出租设备 A、设备 B 和调试工序单位时间的租金
- **约束条件** 出租所得到的租金应不低于自己生产的获利, 即

$$\begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

- **目标函数** 公司总收入即租赁方的成本 $w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$
- **数学模型** 从租赁方的角度考虑

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对偶问题的提出

■ 原问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 6y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对称形式下对偶问题的一般形式

■ 一般形式

$$\begin{aligned} \min w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ \text{s.t. } &\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 矩阵形式

$$\begin{aligned} \min w &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \mathbf{A}^\top \mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^\top \\ \mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}$$

对称形式下对偶问题的一般形式

项目	原问题 (P)	对偶问题 (D)
A	约束系数矩阵	约束系数矩阵的转置
b	约束条件的右端项向量	目标函数中的价格系数向量
C	目标函数中的价格系数向量	约束条件的右端项向量的转置
目标函数	$\max z = \mathbf{CX}$	$\min w = \mathbf{Y}^T \mathbf{b}$
约束条件	$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^T$
决策变量	$\mathbf{X} \geq 0$	$\mathbf{Y} \geq 0$

例 1

- 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 对偶问题

$$\begin{aligned} \min w &= 7y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

课堂练习 1

- 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= -7y_1 - 9y_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} -3y_1 - 4y_2 \leq -5 \\ 2y_1 - y_2 \leq -6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 再出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 对偶问题的对偶是原问题

非对称形式的原-对偶问题关系

■ 考虑非对称形式

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

步骤一

■ 等式变不等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$\Downarrow$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$\Downarrow$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

步骤二

■ 不等式变不等式

□ 目标函数求极大时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$\Downarrow$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

□ 目标函数求极小时

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$\Downarrow$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \geq -b_i$$

步骤三

■ 变量转换

□ 若 $x_k \leq 0$, 令

$$x'_k = -x_k, \quad x'_k \geq 0$$

□ 若存在取值无约束的变量 x_k , 令

$$x_k = x'_k - x''_k, \quad x'_k, x''_k \geq 0$$

例 2

- 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 经过变换后可重新表达为

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq -7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 2

- 令各约束的对偶变量分别是 y_1' , y_1'' , y_2 , 按对应关系写出对偶问题

$$\begin{aligned} \min w &= 7y_1' - 7y_1'' + 9y_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3y_1' - 3y_1'' + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1' + 2y_1'' + y_2 \geq 6 \\ y_1', y_1'', y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 令 $y_1 = y_1' - y_1''$, 得到对偶问题

$$\begin{aligned} \min w &= 7y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1 \text{ 自由}, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 3

- 写出下面问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

例 3

■ 令 $x_2 = -x'_2$, $x_3 = x'_3 - x''_3$, 经过变换后可重新表达为

$$\begin{aligned} \max z &= c_1 x_1 - c_2 x'_2 + c_3 x'_3 - c_3 x''_3 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 - a_{13}x''_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 - a_{23}x''_3 \leq b_2 \\ -a_{21}x_1 + a_{22}x'_2 - a_{23}x'_3 + a_{23}x''_3 \leq -b_2 \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x'_2 - a_{33}x'_3 + a_{33}x''_3 \leq -b_3 \\ x_1, x'_2, x'_3, x''_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 3

- 令各约束的对偶变量分别是 y_1, y_2', y_2'', y_3' , 按对应关系写出

$$\begin{aligned} \min w &= b_1 y_1 + b_2 y_2' - b_2 y_2'' - b_3 y_3' \\ \text{s.t. } &\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2' - a_{21} y_2'' - a_{31} y_3' \geq c_1 \\ -a_{12} y_1 - a_{22} y_2' + a_{22} y_2'' - a_{32} y_3' \geq -c_2 \\ a_{13} y_1 + a_{23} y_2' - a_{23} y_2'' - a_{33} y_3' \geq c_3 \\ -a_{13} y_1 - a_{23} y_2' + a_{23} y_2'' + a_{33} y_3' \geq -c_3 \\ y_1, y_2', y_2'', y_3' \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 3

- 令 $y_2 = y_2' - y_2''$, $y_3 = -y_3'$, 得到对偶问题

$$\begin{aligned} \min w &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \leq c_2 \\ a_{13} y_1 + a_{23} y_2 + a_{33} y_3 = c_3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{无约束}, y_3 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

原问题与对偶问题的关系归纳

原问题 (P)	对偶问题 (D)
目标函数 $\max z$	目标函数 $\min w$
决策变量 n 个 决策变量 ≥ 0 决策变量 ≤ 0 决策变量无约束	约束条件 n 个 约束条件 $\geq$ 约束条件 $\leq$ 约束条件 $=$
约束条件 m 个 约束条件 $\geq$ 约束条件 $\leq$ 约束条件 $=$	决策变量 m 个 决策变量 ≤ 0 决策变量 ≥ 0 决策变量无约束
约束条件右端项向量 目标函数变量系数	目标函数变量的系数 约束条件右端项向量

课堂练习 2

- 写出下列线性规划问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

- 以对偶问题为原问题, 再写出对偶的对偶问题

弱对偶性

- 如果 $\bar{x}_j$ ($j = 1, \dots, n$) 是原问题的可行解, $\bar{y}_i$ ($i = 1, \dots, m$) 是其对偶问题的可行解, 则恒有

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

证明 根据定义易知

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \right) \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \bar{y}_i$$

$$\sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i \geq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{y}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{y}_i \bar{x}_j$$

- 如果 $\bar{x}_j$ ($j = 1, \dots, n$) 是原问题的可行解, $\bar{y}_i$ ($i = 1, \dots, m$) 是其对偶问题的可行解, 则恒有

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i$$

- **推论 1** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界, 反之, 对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界
- **推论 2** 若原问题有可行解且目标函数值无界, 则其对偶问题无可行解, 反之, 对偶问题有无界解, 则原问题无可行解
- **推论 3** 若原问题有可行解, 对偶问题无可行解, 则原问题目标函数值无界, 反之, 对偶问题有可行解, 原问题无可行解, 则对偶问题的目标函数值无界

最优性

- 如果 $\hat{x}_j$ ($j = 1, \dots, n$) 是原问题的可行解, $\hat{y}_i$ ($i = 1, \dots, m$) 是其对偶问题的可行解, 且有 $\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i$ 则 $\hat{x}_j$ ($j = 1, \dots, n$) 是原问题的最优解, $\hat{y}_i$ ($i = 1, \dots, m$) 是其对偶问题的最优解

证明 设 x_j^* ($j = 1, \dots, n$) 是原问题的最优解, y_i^* ($i = 1, \dots, m$) 是其对偶问题的最优解, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j &\leq \sum_{j=1}^n c_j x_j^*, \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \leq \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i \\ \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j &= \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i, \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j &= \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i \end{aligned}$$

- 若原问题及其对偶问题均具有可行解, 则两者均具有最优解, 且它们最优解的目标函数值相等

证明 由于两者均有可行解, 根据弱对偶性的**推论 1**, 对原问题的目标函数值具有上界, 对偶问题的目标函数值具有下界, 因此两者均具有最优解

当原问题为最优解时, 其对偶问题的解为可行解, 且有 $z = w$, 由最优性知, 这时两者的解均为最优解

"**推论 1** 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界, 反之, 对偶问题任一可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界"

- 在线性规划问题的最优解中, 如果对应某一约束条件的对偶变量值为非零, 则该约束条件取严格等式; 反之, 如果约束条件取严格不等式, 则其对应的对偶变量一定为零。也即

□ 若 $\hat{y}_i > 0$, 则有 $\sum_{j=1}^n a_{ij}\hat{x}_j = b_i$, 即 $\hat{x}_{si} = 0$

□ 若 $\sum_{j=1}^n a_{ij}\hat{x}_j < b_i$, 即 $\hat{x}_{si} = 0$, 则有 $\hat{y}_i = 0$

因此一定有 $\hat{x}_{si} \cdot \hat{y}_i = 0$

证明 由弱对偶性知

$$\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j \hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_i \hat{y}_i$$

又根据最优性 $\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i$, 故上式中全为等式

由右端等式得

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \right) \hat{y}_i = 0$$

由于 $\hat{y}_i \geq 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \leq 0$, 故对所有 $i = 1, \dots, m$ 有

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \right) \hat{y}_i = 0$$

□ 当 $\hat{y}_i > 0$ 时, 必有 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i = 0$

□ 当 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i < 0$ 时, 必有 $\hat{y}_i = 0$

- 将互补松弛性质应用于其对偶问题时, 可以描述为
 - 如果有 $\hat{x}_i > 0$, 则 $\sum_{i=1}^m a_{ij}\hat{y}_i = c_j$
 - 如果有 $\sum_{i=1}^m a_{ij}\hat{y}_j > c_j$, 则 $\hat{x}_j = 0$
- 上述针对对称形式证明得对偶问题得性质, 同样适用于非对称形式
- 互补松弛性质是理解非线性规划中 KKT 条件得重要基础

例 4

- 试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 4

■ 上述问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min w &= 2y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 由第 1 个约束条件知对偶问题无可行解, 因而无最优解

■ 由 **推论 3** 知原问题也无最优解

"**推论 3** 若原问题有可行解, 对偶问题无可行解, 则原问题目标函数值无界..."

例 4

■ 已知线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, z = 5$, 试用对偶理论找出原问题的最优解

例 5

■ 原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \leq 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \leq 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 & (5) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 5

- 将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 的值代入约束条件得

$$(2) = 1/5 < 3, (3) = 17/5 < 5, (4) = 7/5 < 2$$

它们为严格不等式, 由**互补松弛性**得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$

- 由于 $y_1^*, y_2^* > 0$, 由**互补松弛性**可知原问题的两个约束条件应取等式, 即

$$x_1^* + 3x_5^* = 4, 2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1, x_5^* = 1$

- 因此原问题的最优解为 $X^* = (1, 0, 0, 0, 1)^\top$, 最优值为 $w^* = 5$

- 对偶问题的提出
- 对称形式下原问题与对偶问题
- 非对称形式的原-对偶问题关系
- 对偶问题的基本性质
 - 弱对偶定理
 - 最优性定理
 - 对偶定理
 - 互补松弛性
- 课后作业: 习题 2.4、2.5、2.7

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈