

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统计算机辅助设计

第9章: 鲁棒控制器与鲁棒控制器设计

主讲: 修贤超



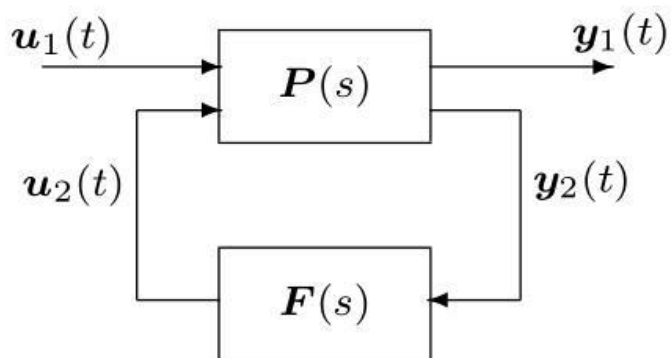
鲁棒控制器设计

- 前面介绍了控制器设计方法
 - 如果受控对象参数发生了变化
 - 如果系统受到噪声干扰
- 原来控制器下是否仍然能保持很好的控制效果？是否闭环仍然稳定？鲁棒控制就是解决这样的问题
- 鲁棒性 (Robustness) 的概念
 - 控制系统在一定参数摄动下，维持某些性能的能力

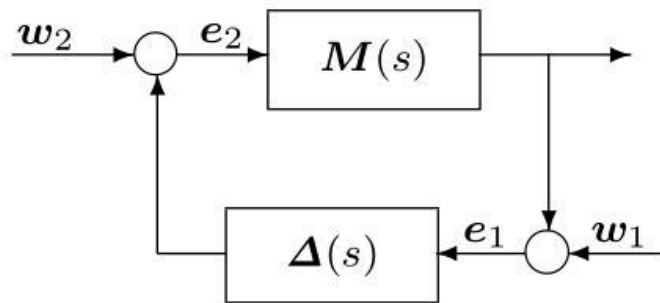


小增益定理

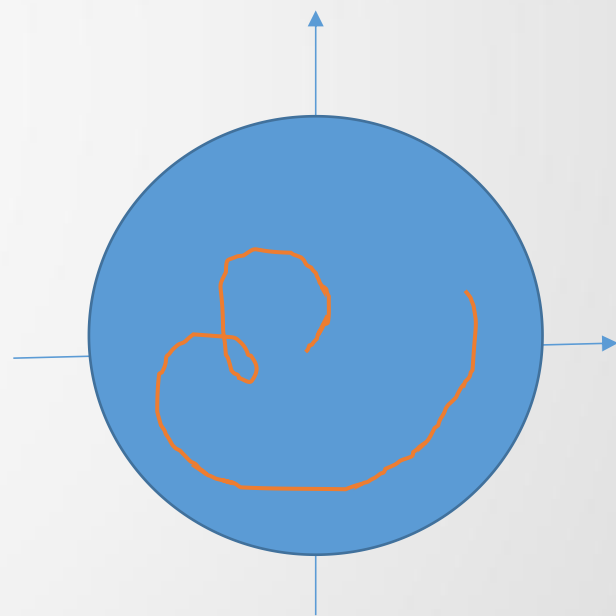
- 反馈控制的标准结构（串联控制只是其中一个特例）
- 小增益定理 $\|M(s)\|_{\infty} \|\Delta(s)\|_{\infty} < 1$
- 以单变量为例解释



(a) 标准反馈控制结构



(b) 小增益定理示意图





鲁棒控制器的结构

➤ 增广受控对象模型

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

➤ 增广状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax + [B_1 \ B_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

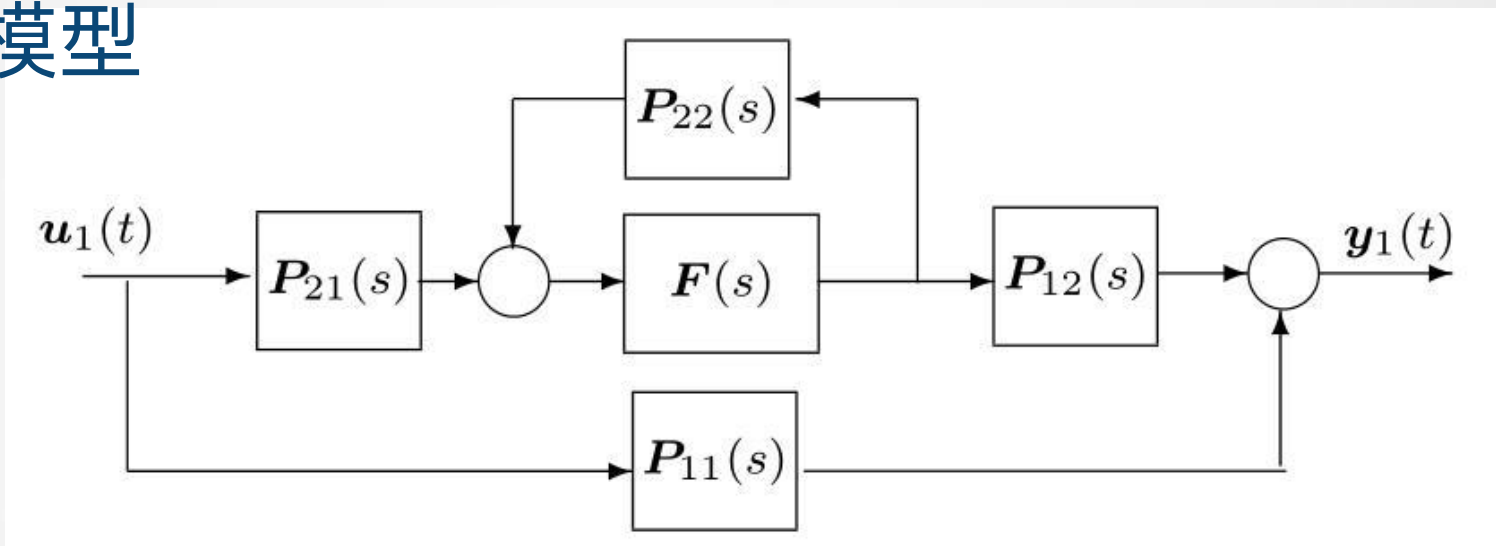
➤ 外部开环模型

$$T_{y_1 u_1}(s) = P_{11}(s) + P_{12}(s) \left[I - F(s)P_{22}(s) \right]^{-1} F(s)P_{21}(s)$$



闭环系统的另一种描述

➤ 闭环系统模型



➤ 鲁棒控制的目的

➤ 设计 $u_2(s) = F(s)y_2(s)$

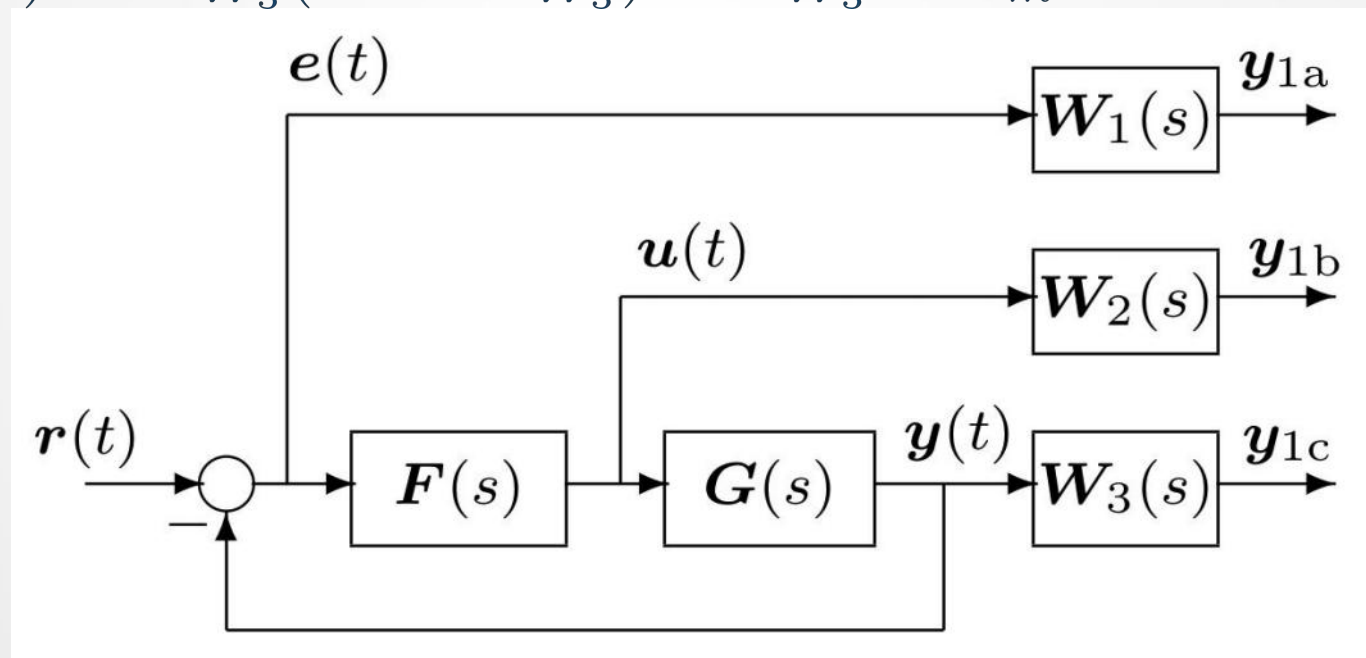
➤ 使得开环系统 $\|T_{y_1 u_1}(s)\| < 1$



加权受控对象

- 对三个关键信号引入加权
- $W_3(s)$ 可以是非正则的

$$W_3(s) = C_{W_3}(sI - A_{W_3})^{-1}B_{W_3} + P_m s^m + \dots + P_1 s + P_0$$

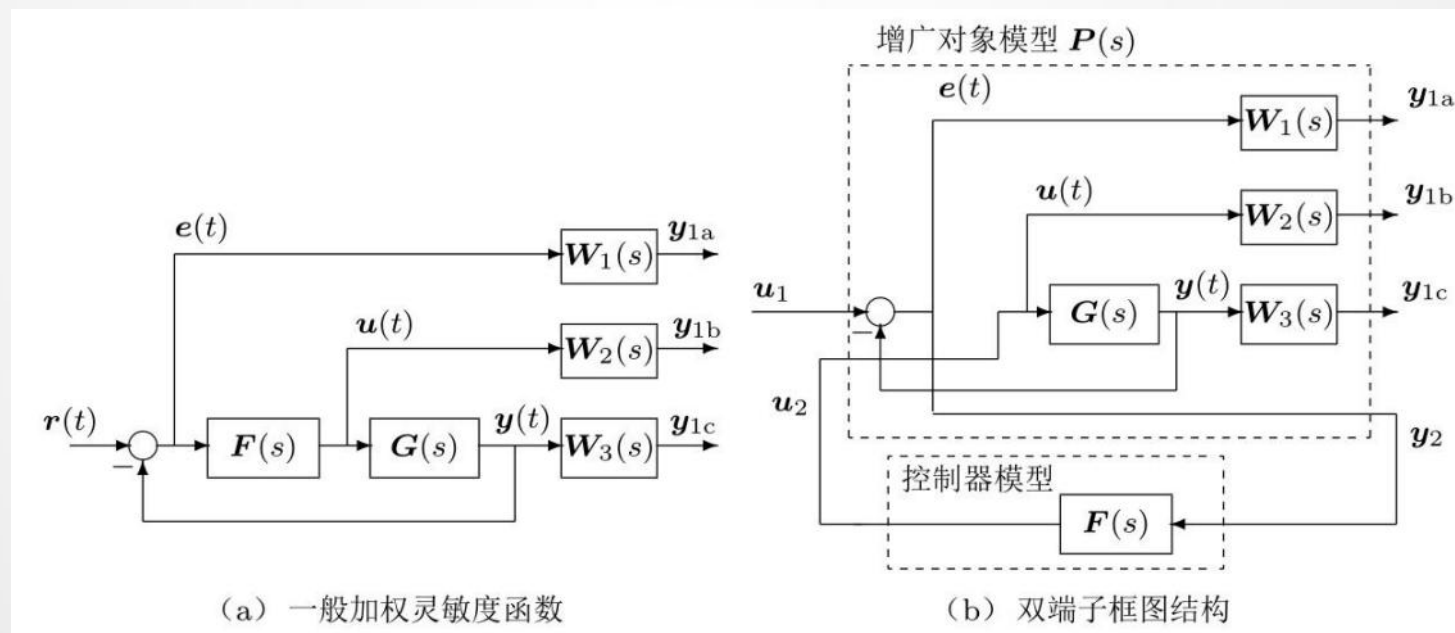




加权模型与标准型一致

- 对加权模型表示形式稍加改动
- 可见和标准闭环模型一致

$$u_2(t) = u(t), \quad y_2(t) = e(t)$$





增广受控对象模型

➤ 引入加权函数后得出的模型

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cccc|c|c} A & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ -B_{W_1}C & A_{W_1} & 0 & 0 & B_{W_1} & -B_{W_1}D \\ 0 & 0 & A_{W_2} & 0 & 0 & B_{W_2} \\ B_{W_3}C & 0 & 0 & A_{W_3} & 0 & B_{W_3}D \\ \hline -D_{W_1}C & C_{W_1} & 0 & 0 & D_{W_1} & -D_{W_1}D \\ 0 & 0 & C_{W_2} & 0 & 0 & D_{W_2} \\ \tilde{C} = S_{W_3}C + P_1CA + \dots + P_mCA^{m-1} & 0 & 0 & P_mCW_3 & 0 & \tilde{D} + D_{W_3}D \\ \hline \tilde{D} = P_0D + P_1CB + \dots + P_mCA^{m-2}B & -C & 0 & 0 & I & -D \end{array} \right]$$



鲁棒控制系统的MATLAB描述

➤ MATLAB鲁棒控制工具箱，包括原来的鲁棒控制工具箱， μ 分析与综合工具箱，线性矩阵不等式工具箱

➤ 双端子增广模型的输入

$$S = \text{mkssys}(A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, 'tss')$$

$$S_{tss} = \text{augtf}(S, W_1, W_2, W_3)$$

$$S_{tss} = \text{augw}(S, W_1, W_2, W_3) \quad \text{只能用正则}$$

➤ 提取子模型

$$[A, B, C, D] = \text{branch}(G)$$

$$[A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}] = \text{branch}(G)$$



例9-2 受控对象的加权增广

➤ 受控对象模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5000 & -100/3 & 500 & 100/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 100/3 & -4 & -60 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 25/3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [0, 0, 1, 0] \boldsymbol{x}(t)$$

➤ 加权矩阵 $W_1(s) = 100/(s+1)$, $W_3(s) = s/1000$

➤ 表示增广模型

```
>> A=[0,1,0,0; -5000,-100/3,500,100/3; 0,-1,0,1; 0,100/3,-4,-60];  
B=[0; 25/3; 0; -1]; C=[0,0,1,0]; D=0; G=ss(A,B,C,D);  
s=tf('s'); W1=100/(s+1); W3=s/1000; W2=1e-5;  
P=augtf(G,W1,W2,W3)
```



$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 鲁棒控制器设计方法

➤ \mathcal{H}_∞ 控制器设计

➤ 选择小正数 γ , 找到一个控制器 $F(s)$, 使得 $\|T_{y_1 u_1}(s)\|_\infty < \gamma$

➤ 控制器状态方程

$$\dot{x}(t) = A_f x(t) - Z L u(t), \quad y(t) = K x(t)$$

$$A_f = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 K + Z L C_2$$

$$K = -B_2^T X, \quad L = -Y C_2^T, \quad Z = (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1}$$

➤ X, Y 满足 Riccati 方程

$$A^T X + X A + X (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1 C_1^T = 0$$

$$A Y + Y A^T + Y (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1^T B_1 = 0$$



用MATLAB设计鲁棒控制器

➤ 已知增广的双端子受控对象模型 G_{tss}

➤ 各种控制器的设计

➤ 最优 \mathcal{H}_∞ 控制器

$$[G_c, G_{cl}, \gamma] = \text{hinfsyn}(G_{tss})$$

➤ 最优 \mathcal{H}_2 控制器

$$[G_c, G_{cl}] = \text{h2syn}(G_{tss})$$



例9-9 最优鲁棒控制器设计

➤ 受控对象模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5000 & -100/3 & 500 & 100/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 100/3 & -4 & -60 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 25/3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [0, 0, 1, 0] \boldsymbol{x}(t)$$

➤ 加权矩阵

$$W_1(s) = 100/(s+1), \quad W_2(s) = 10^{-5}, \quad W_3(s) = s/1000$$



最优鲁棒控制器设计

➤ 最优 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计控制器

```
>> A=[0,1,0,0; -5000,-100/3,500,100/3; 0,-1,0,1; 0,100/3,-4,-60];  
B=[0; 25/3; 0; -1]; C=[0,0,1,0]; G=ss(A,B,C,0);  
s=tf('s'); W1=100/(s+1); W2=1e-5; W3=s/1000;  
G1=augtf(G,W1,W2,W3); Gc1=zpk(h2syn(G1)),  
[Gc2,a,g]=hinfsyn(G1); Gc2=zpk(Gc2), g
```

➤ 控制系统响应

```
>> bode(G*Gc1,'-',G*Gc2,'--'),
```

```
>> step(feedback(G*Gc1,1),'-',feedback(G*Gc2,1),'--')
```



控制器进一步分析

➤ 控制信号绘制

```
>> step(feedback(Gc1,G), '-', feedback(Gc2,G), '--')
```

➤ 控制信号过大，原因是什么？

```
>> W2=0.01; W1=2000/(s+1);  
G1=augtf(G,W1,W2,W3); Gc1=zpk(h2syn(G1)),  
[Gc2,a,g]=hinfosyn(G1); Gc2=zpk(Gc2), g
```

```
>> step(feedback(G*Gc1,1), '-', feedback(G*Gc2,1), '--')
```

```
>> step(feedback(Gc1,G), '-', feedback(Gc2,G), '--')
```



多变量系统的分析

- 多变量系统可以由前面介绍的方法直接设计
 - 选择加权函数
 - 建立增广状态方程模型
 - 直接设计
 - 仿真分析
- 还可以分析多变量系统的频域响应
 - 分析系统的



例9-10 多变量系统设计

➤ 多变量受控对象

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.806s + 0.264}{s^2 + 1.15s + 0.202} & \frac{-15s - 1.42}{s^3 + 12.8s^2 + 13.6s + 2.36} \\ \frac{1.95s^2 + 2.12s + 0.49}{s^3 + 9.15s^2 + 9.39s + 1.62} & \frac{7.15s^2 + 25.8s + 9.35}{s^4 + 20.8s^3 + 116.4s^2 + 111.6s + 18.8} \end{bmatrix}$$

➤ 加权函数选择

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{100}{s + 0.5} & 0 \\ 0 & \frac{100}{s + 1} \end{bmatrix}, \quad W_2 = 10^{-5} I, \quad W_3(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{100} & 0 \\ 0 & \frac{200}{s} \end{bmatrix}$$



控制器直接设计

➤ 模型输入与控制器设计

```
>> g11=tf([0.806 0.264],[1 1.15 0.202]); s=tf('s');  
g12=tf([-15 -1.42],[1 12.8 13.6 2.36]);  
g21=tf([1.95 2.12 0.49],[1 9.15 9.39 1.62]);  
g22=tf([7.15 25.8 9.35],[1 20.8 116.4 111.6 18.8]);  
G=[g11, g12; g21, g22]; w2=tf(1); W2=1e-5*[w2,0; 0,w2];
```

```
>> W1=[100/(s+0.5), 0; 0, 100/(s+1)]; W3=[s/1000, 0; 0 s/200];  
Tss=augtf(G,W1,W2,W3); [Gc,a,g]=hinfsyn(Tss); zpk(Gc(1,2));  
step(feedback(G*Gc,eye(2)),0.1)
```



修改加权，重新设计

➤ 重新选择加权矩阵

```
>> W1=[100/(s+0.5) 0; 0 1000/(s+1)];  
Tss=augtf(G,W1,W2,W3); [Gc1,a,g]=hinfsyn(Tss);  
step(feedback(G*Gc1,eye(2)),0.1);
```



反馈系统与加权函数

- 给出了标准的反馈系统结构模型
- 介绍了三个加权函数
- 介绍了如何使用MATLAB表示
 - 加权函数 `tf, ss`
 - 增广模型 `augw, augtf, mksys`

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$



鲁棒控制器设计小结

- 采用函数调用的方法直接设计
 - 需要用户提供受控对象模型
 - 需要给出三个加权函数
 - 对受控对象与加权进行增广 `augtf`, `augw`
 - 然后调用函数直接设计 `h2syn`, `hinfsyn`
- 设计完成之后应该做适当的仿真
 - 看看是不是哪些信号与期望不一致，修改加权
 - 重新设计，直至得到满意的效果为止



Q & A

感谢您的聆听和反馈