国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统计算机辅助设计

第3章: 科学运算问题的MATLAB求解

主讲: 修贤超

科学运算问题的MATLAB求解

- 3.1 线性代数问题的MATLAB求解
- 3.2 代数方程求解
- 3.3 微分方程求解
- 3.4 最优化问题的求解
- 3.5 Laplace 变换与 z 变换问题的求解

线性代数问题的求解

- 线性代数在控制中是很重要的数学工具
  - 稳定性可以通过矩阵特征值求解
  - 系统可控性、可观测性可以求矩阵的秩
  - 线性相似变换需要求解矩阵的逆和乘法
  - 状态方程解析解需要矩阵的指数函数等
- 本节主要内容
  - 矩阵的基本分析
  - 矩阵的分解
  - 矩阵指数和指数函数

例3-1 Hilbert矩阵的行列式

- Hilbert 矩阵 $h_{i,j} = 1/(i+j-1)$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

- 求行列式
  - 精确值

```
>> H=hilb(10); d1=det(H), H=sym(H); d2=det(H)
```

$$d_2 = \frac{1}{46206893947914691316295628839036278726983680000000000}$$

矩阵性质分析

- 矩阵的迹：对角元素的和 t=trace($\boldsymbol{A}$)
- 矩阵的秩 rank($\boldsymbol{A}$)，rank($\boldsymbol{A}$,ε)
  - 矩阵列向量中线性无关的最大列（行）数
  - 矩阵的线性无关列、行数相等，矩阵的秩
- 矩阵的范数
  - 矩阵的测度，用一个数表示矩阵大小

$$||\boldsymbol{A}||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,\ ||\boldsymbol{A}||_2 = \sqrt{s_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})},\ ||\boldsymbol{A}||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

norm(A,key)

特征值与多项式

- 矩阵的特征多项式、特征方程与特征根
  - 特征多项式

$$C(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1}s + c_n$$

  - MATLAB求解　$\boldsymbol{p}$=poly($\boldsymbol{A}$)，　$\boldsymbol{p}$=charpoly(sym($\boldsymbol{A}$))
  - 特征根求解　$\boldsymbol{r}$=roots($\boldsymbol{p}$), $\boldsymbol{r}$=eig($\boldsymbol{A}$), [$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{D}$]=eig($\boldsymbol{A}$)
  - 多项式求值　$\boldsymbol{C}$=polyval($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{x}$)
  - 多项式矩阵求值　$\boldsymbol{B}$=polyvalm($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{A}$)

$$\boldsymbol{B} = a_1\boldsymbol{A}^n + a_2\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_n\boldsymbol{A} + a_{n+1}\boldsymbol{I}$$

矩阵的逆与广义逆

- 矩阵的逆 $AC = CA = I$
  - 方阵、非奇异
  - MATLAB求解 C=inv(A)
- 矩阵的Moore-Penrose广义逆（伪逆） $\min\limits_{M} ||AM - I||$
  - 几个条件 $AMA = A$, $MAM = M$
    AM and MA symmetrical
    AM and MA symmetrical
  - 唯一，记作 $M = A^{+}$
  - MATLAB求解 M=pinv(A)

矩阵的分解

- 矩阵的相似变换
  - 非奇异方阵 $\boldsymbol{T}$, $\widehat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$
- 矩阵的三角分解：LU、Cholesky分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$
  - 矩阵分解：$[\boldsymbol{L},\boldsymbol{U}]=\mathtt{lu}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{D}=\mathtt{chol}(\boldsymbol{A})$
    - lu(), chol() 函数处理对称矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

正交矩阵与奇异值

- 正交基与正交分解：
  - 正交矩阵定义： $\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^*$
  - 正交基分解： $\boldsymbol{Q}$=`orth`($\boldsymbol{A}$)
- 矩阵的奇异值分解
  - 定义： $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$
  - 条件数： $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \sigma_{\max}/\sigma_{\min}$
  - MATLAB 函数：`[`$\boldsymbol{L}$`,`$\boldsymbol{A}_1$`,`$\boldsymbol{M}$`]=svd(`$\boldsymbol{A}$`)`， `conv(`$\boldsymbol{A}$`)`

例3-2 已知矩阵的基本分析

- Vandermonde 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$
  - 符号矩阵
- 行列式求解

```
>> syms a b c; A=[1,1,1; a,b,c; a^2,b^2,c^2];
   det(A); simplify(factor(ans))
```

- 逆矩阵

```
>> B=inv(A); simplify(B*A-eye(3))
```

- 特征多项式

```
>> p=charpoly(A)
```

例3-3 矩阵指数与指数函数

- 矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-11 & -5 & 5\\ 12 & 5 & -6\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

  - 数学定义

$$e^{\boldsymbol{A}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\boldsymbol{A}^i=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\cdots+\frac{1}{m!}\boldsymbol{A}^m+\cdots$$

  - MATLAB 求解（解析与数值解） `expm(`$\boldsymbol{A}$`)`

- 指数函数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 同样可以用expm()函数直接求取

```
>> A=[-11,-5,5; 12,5,-6; 0,1,0]; expm(A)
A=sym(A); expm(A), syms t; expm(A*t)
```

例3-4 任意矩阵函数的计算

- 演示：自编 funmsym() 求矩阵的任意函数 $\psi(\boldsymbol{A}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\cos(\boldsymbol{A}t)}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- MATLAB直接求解

```
>> A=[-7,2,0,-1; 1,-4,2,1; 2,-1,-6,-1; -1,-1,0,-4];
   syms x t; A1=funmsym(sym(A),exp(x*cos(x*t)),x)
```

$$\psi_{1,1}(\boldsymbol{A}) = 2/9\mathrm{e}^{-3\cos 3t} + (2t\sin 6t + 6t^2\cos 6t)\mathrm{e}^{-6\cos 6t} + (\cos 6t - 6t\sin 6t)^2\mathrm{e}^{-6\cos 6t} - 5/3(\cos 6t - 6t\sin 6t)\mathrm{e}^{-6\cos 6t} + 7/9\mathrm{e}^{-6\cos 6t}$$

科学运算问题的MATLAB求解

- 3.1 线性代数问题的MATLAB求解
- 3.2 代数方程求解
- 3.3 微分方程求解
- 3.4 最优化问题的求解
- 3.5 Laplace 变换与 z 变换问题的求解

线性代数方程的解析解与数值解

- 本节主要内容
  - 线性方程的求解
  - Lyapunov 方程求解
  - Sylvester 方程求解
  - Riccati 方程求解
- 前三个问题将介绍解析解与数值解，后一个属于非线性矩阵方程只能介绍数值解，并在下小节进一步探讨数值解

线性代数方程的求解

- 线性代数方程的标准型 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$
  - 解的判定矩阵：$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$
- 求解方法分三种情况考虑
  - 唯一解：$\boldsymbol{A}$ 为非奇异方阵，$\boldsymbol{X}=\texttt{inv}(\boldsymbol{A})*\boldsymbol{B}$
  - 有无穷多解 rank($\boldsymbol{A}$)=rank($\boldsymbol{C}$)<n
    - 基础解系 $\hat{x}=\texttt{null}(\boldsymbol{A})$
    - 特解 $x_2=\texttt{pinv}(\boldsymbol{A})*\boldsymbol{B}$
  - 无解：矛盾方程的最小二乘解
- 基本行变换求解：rref 函数

例3-4 线性方程求解

- 线性方程 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&2&1&1\\2&4&6&8\\4&4&2&2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{A}$ 奇异，与 $\boldsymbol{C}$ 秩相等有无穷解

```
>> A=[1 2 3 4; 2 2 1 1; 2 4 6 8; 4 4 2 2];
B=[1;3;2;6]; C=[A B]; [rank(A), rank(C)]
```

```
>> syms a1 a2; Z=null(sym(A)); x0=sym(pinv(A))*B;
x=a1*Z(:,1)+a2*Z(:,2)+x0, A*x-B
```

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\begin{bmatrix}2\\-5/2\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}3\\-7/2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}125/131\\96/131\\-10/131\\-39/131\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a_1+3a_2+125/131\\-5a_1/2-7a_2/2+96/131\\a_1-10/131\\a_2-39/131\end{bmatrix}$$

基本行变换的求解方法

- 基本行变换方法求解

```
>> C=sym([A, B]); D=rref(C)
```

- 得出的结果

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 导出数学解为
  - x_3, x_4可以自由选取
  - 另两个解为 $x_1=2x_3+3x_4+2,\ x_2=-5x_3/2-7x_4/2-1/2$

线性方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$

- 标准方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$
- 可以利用Kronecker将其变换成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 型方程的根

$$\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$$

- Kronecker 乘积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1m}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{nm}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

- MATLAB计算 C=`kron(`A`,`B`)`

Lyapunov方程求解

- 连续 Lyapunov 方程
  - Lyapunov 方程的数学形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{C}$$

  - MATLAB 数值解 $\boldsymbol{X}$=`lyap(`$\boldsymbol{A}$`,`$\boldsymbol{C}$`)`
- 离散 Lyapunov 方程
  - 数学形式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}$
  - MATLAB 求解 $\boldsymbol{X}$=`dlyap(`$\boldsymbol{A}$`,`$\boldsymbol{Q}$`)`

Sylvester方程求解

- Sylvester方程是Lyapunov方程的推广
  - 数学形式： $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=-\boldsymbol{C}$
  - MATLAB求解： $\boldsymbol{X}$=lyap($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$)
- Sylvester方程的解析求解 $(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$
  - 算法：

```
function X=lyapsym(A,B,C)
if nargin==2, C=B; B=A'; end
[nr,nc]=size(C);  A0=kron(eye(nc),A)+kron(B.',eye(nr));
try, x0=-inv(A0)*C(:); X=reshape(x0,nr,nc);
catch, error('singular matrix found.'), end
```

各种 Sylvester 类方程的求解方法

- 方程解析解求解语句
  - Lyapunov方程 $AX + XA^{\mathrm{T}} = -C$
  - 离散Lyapunov方程 $AXA^{\mathrm{T}} - X + Q = 0$
  - Sylvester方程 $AX + XB = -C$
- 直接求解

```
X=lyapsym(sym(A),C)
X=lyapsym(sym(A),-inv(A’) ,Q*inv(A’))
X=lyapsym(sym(A),B,C)
```

例3-5 Sylvester方程的求解

- Sylvester方程

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

- MATLAB求解

```
>> A=[8,1,6; 3,5,7; 4,9,2]; B=[16,4,1; 9,3,1; 4,2,1];
   C=-[1,2,3; 4,5,6; 7,8,0]; X=lyap(A,B,C),
   norm(A*X+X*B+C)
```

Riccati 方程与数值求解

- 数学形式

$$A^{\mathrm{T}}X + XA - XBX + C = 0$$

  - 二次型方程，非线性
  - MATLAB求解

$$X = \mathrm{are}(A, B, C)$$

- 遗留的问题

$$AX + XD - XBX + C = 0$$

例3-6 Riccati方程的数值解

- Riccati方程 $A^{\mathrm{T}}X + XA - XBX + C = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - X \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- 识别 A, B, C 矩阵，直接求解并检验

```
>> A=[-2,1,-3; -1,0,-2; 0,-1,-2];
   B=[2,2,-2; -1 5 -2; -1 1 2];
   C=[5 -4 4; 1 0 4; 1 -1 5]; X=are(A,B,C);
   norm(A'*X+X*A-X*B*X+C)
```

一般非线性方程的求解

- 非线性方程的解析解法 $\boldsymbol{F(x)=0}$
- 举例：鸡兔同笼问题

$$\begin{cases} x+y=14 \\ 2x+4y=36 \end{cases}$$

- 求解
  - 代数方法
  - 直接方法

```
>> syms x y;
   [x,y]=solve(x+y==14,2*x+4*y==36)
```

例3-7 复杂多项式方程求解

- 二元方程 $$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}+2\dfrac{1}{y}+\dfrac{5}{2y^2}+3\dfrac{1}{x^3}=0 \\ \dfrac{y}{2}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{x^4}+5y^4=0 \end{cases}$$
- 求解

```
>> syms x y
   [x,y]=vpasolve(x^2/2+x+3/2+2/y+5/(2*y^2)+3/x^3==0,...
        y/2+3/(2*x)+1/x^4+5*y^4==0); size(x)
```

- 解的检验

```
>> norm([x.^2/2+x+3/2+2./y+5./(2*y.^2)+3./x.^3,...
         y/2+3./(2*x)+1./x.^4+5*y.^4])
```

非线性方程的图解法

- fimplicit 或 ezplot 函数绘制隐函数曲线
- 可以由其联立方程交点读出
  - 直观，可以求出感兴趣区域内全部实根
  - 局部放大，但精度不高
  - 最多适合于求解两个变量的方程

例3-8 非线性方程图解法举例

- 已知非线性方程组

$$\begin{cases} x^2 e^{-xy^2/2} + e^{-x/2}\sin(xy) = 0 \\ y^2\cos(y+x^2) + x^2 e^{x+y} = 0 \end{cases}$$

- 感兴趣区间 $-2\pi \leqslant x, y \leqslant 2\pi$
- MATLAB直接求解

```
>> syms x y, xx=[-2*pi,2*pi];
   fimplicit(x^2*exp(-x*y^2/2)+exp(-x/2)*sin(x*y),xx)
   hold on; fimplicit(y^2*cos(y+x^2)+x^2*exp(x+y),xx)
```

一般非线性方程的数值解法

- fsolve() 求解方程的步骤：
  - 将代数方程写成标准型 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$
  - 用MATLAB描述方程
    - 编写M-函数：

      入口： function y=funname(x)
    - 匿名函数: >> y=@(x)[......]
  - 调用 fsolve() 函数直接求解，选择初值

$$[x, f_1, \texttt{flag}] = \texttt{fsolve}(\texttt{fun}, x_0, \texttt{options})$$

例3-9 求解实例

- 非线性方程组

$$\begin{cases} x^2 \mathrm{e}^{-xy^2/2} + \mathrm{e}^{-x/2} \sin(xy) = 0 \\ y^2 \cos(y + x^2) + x^2 \mathrm{e}^{x+y} = 0 \end{cases}$$

- 变量替换 $x_1 = x,\ x_2 = y,\ \boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$
- 变换成标准型 $\boldsymbol{F(X) = 0}$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 \mathrm{e}^{-x_1 x_2^2/2} + \mathrm{e}^{-x_1/2} \sin(x_1 x_2) \\ x_2^2 \cos(x_2 + x_1^2) + x_1^2 \mathrm{e}^{x_1 + x_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

方程数值求解步骤

- 方程标准型 $$y=f(x)=\begin{bmatrix} x_1^2 e^{-x_1x_2^2/2}+e^{-x_1/2}\sin(x_1x_2) \\ x_2^2\cos(x_2+x_1^2)+x_1^2e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}=0$$
- 方程描述

```
>> f=@(x)[x(1)^2*exp(-x(1)*x(2)^2/2)+...
              exp(-x(1)/2)*sin(x(1)*x(2));
     x(2)^2*cos(x(2)+x(1)^2)+x(1)^2*exp(x(1)+x(2))];
```

```
>> x0=rand(2,1); x=fsolve(f,x0), f(x)
```

```
>> x0=[2.7795; -3.3911]; ff=optimset;
   ff.TolX=1e-20; ff.TolFun=1e-20; x=fsolve(f,x0,ff), f(x)
```

非线性矩阵方程的求解

- 一次得到多个根的函数

$$\texttt{more\_sols}(f, \boldsymbol{X}_0, A, \epsilon, t_{\text{lim}})$$

- 变量说明
  - 代数方程的MATLAB表示 f
  - 已知的解集 X_0，三维数组
- 无穷循环，可以用Ctrl+C在任何时候中断

例3-10 Riccati方程求解

- Riccati 方程其他根的求解

$$A^{\mathrm{T}}X + XA - XBX + C = 0$$

- 函数 are() 只求出一个根，方程到底有多少根？

$$A^{\mathrm{T}}X + XA - XBX + C = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[-2,1,-3; -1,0,-2; 0,-1,-2];
   B=[2,2,-2; -1 5 -2; -1 1 2];
   C=[5 -4 4; 1 0 4; 1 -1 5]; f=@(X)A'*X+X*A-X*B*X+C;
   more_sols(f,zeros(3,3,0))
```

例3-11 Riccati 变形方程

$AX+XD-XBX+C=0$

- 变形Riccati 方程

$$AX+XD-XBX^{\mathrm{T}}+C=0$$

$AX+XD-XBX+C=0$

- 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&9\\9&7&9\\6&5&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&3&6\\8&2&0\\8&2&8\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}7&0&3\\5&6&4\\1&4&4\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3&9&5\\1&2&9\\3&3&0\end{bmatrix}$$

- 求全部根

```
>> A=[2,1,9; 9,7,9; 6,5,3]; B=[0,3,6; 8,2,0; 8,2,8];
   C=[7,0,3; 5,6,4; 1,4,4]; D=[3,9,5; 1,2,9; 3,3,0];
   f=@(X)A*X+X*D-X*B*X.'+C; more_sols(f,zeros(3,3,0))
```

例3-12 一般非线性方程求解

- 图解法求出多个根，fsolve()一次只一个

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 \mathrm{e}^{-x_1 x_2^2/2} + \mathrm{e}^{-x_1/2}\sin(x_1 x_2) \\ x_2^2 \cos(x_2 + x_1^2) + x_1^2 \mathrm{e}^{x_1+x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

```
>> f=@(x)[x(1)^2*exp(-x(1)*x(2)^2/2)+exp(-x(1)/2)*sin(x(1)*x(2));
       x(2)^2*cos(x(2)+x(1)^2)+x(1)^2*exp(x(1)+x(2))];
   more_sols(f,[0; 0],12)
```

```
>> syms x y, xx=[-2*pi,2*pi];
   fimplicit(x^2*exp(-x*y^2/2)+exp(-x/2)*sin(x*y),xx)
   hold on; fimplicit(y^2*cos(y+x^2)+x^2*exp(x+y),xx)
   x=X(1,1,:); x=x(:); y=X(2,1,:); y=y(:); plot(x,y,'o')
```

线性代数问题求解小结

- 线性代数很多问题可以用MATLAB语句直接求解，和数学表示差不多一样直观
- 很多方法可以同时得出解析解和数值解
  - 涉及的函数：det()、trace()、norm()、rank()、poly()、polyval()、polyvalm()、inv()、pinv()、svd()、lu()、chol()、cond()、expm()
  - 函数的两种调用方法，det(A)、det(sym(A))
- 线性代数方程的求解将在3-2节介绍

代数方程求解小结

- 仿照线性代数介绍*AX*=*B* 方程求解
  - 三种情况：inv()、null()、pinv()、rank()、rref()
- Lyapunov、Sylvester 与 Ricatti 方程
  - 涉及的函数：lyap()、are()、重载的lyap()
- 一般非线性方程求解
  - 解析解法：solve()
  - 图解法：ezplot()、hold
  - 数值解法：fsolve()、optimset()设置参数（精度）
- 矩阵方程与多解方程：more_sols()

Q & A

感谢您的聆听和反馈

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统计算机辅助设计

第3章: 科学运算问题的MATLAB求解

主讲: 修贤超

科学运算问题的MATLAB求解

- 3.1 线性代数问题的MATLAB求解
- 3.2 代数方程求解
- 3.3 微分方程求解
- 3.4 最优化问题的求解
- 3.5 Laplace 变换与 z 变换问题的求解

一阶常微分方程组的数值解法

- 一阶显式微分方程的标准型

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}_0, \quad \dot{x}_i = f_i(t, \boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

- 微分方程数值解算法
  - Runge–Kutta法、Adams法、Gear法等
  - 传统定步长方法适合于讲解不适合应用
  - 变步长方法、MATLAB直接可调用函数

$$[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}]=\texttt{ode45(Fun,tspan,}\boldsymbol{x}_0\texttt{,options,pars)}$$

微分方程求解的步骤

- 将微分方程变换成标准型 $\dot{x} = f(t, x),\ x_0$
- 用MATLAB描述微分方程
  - M-函数

    入口：function dx=funmane(t,x)
  - 匿名函数

    >> f=@(t,x)[...]
- 求解 $[t, x]$=ode45(Fun,tspan,x_0,options,pars)
- 验证：odeset()函数

例3-13 非线性微分方程求解

- 非线性微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) = b + [x(t) - c]z(t), \end{cases}$$

- 变换 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = b + [x_1(t) - c]x_3(t) \end{cases} \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -x_2(t) - x_3(t) \\ x_1(t) + ax_2(t) \\ b + [x_1(t) - c]x_3(t) \end{bmatrix}$$

- MATLAB描述

```
function dx=rossler(t,x)
dx=[-x(2)-x(3); x(1)+0.2*x(2); 0.2+(x(1)-5.7)*x(3)];
```

```
>> f=@(t,x)[-x(2)-x(3); x(1)+0.2*x(2); 0.2+(x(1)-5.7)*x(3)];
```

微分方程数值求解

- 解方程
  - ```
    >> x0=[0; 0; 0];
    [t,y]=ode45(@rossler,[0,100],x0); plot(t,y)
    ```
  - ```
    >> plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3)), grid
    ```
- 带附加变量问题求解
  - ```
    >> a=0.2; b=0.2; c=5.7;
    f=@(t,x)[-x(2)-x(3); x(1)+a*x(2); b+(x(1)-c)*x(3)];
    [t,y]=ode45(f,[0,100],x0);
    ```
    ```

微分方程的变换

- 目的：将需要求解的方程变成 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}_0$
- 例：高阶微分方程变换

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$$

- 选择状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \cdots, x_n = y^{(n-1)}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} \end{cases}$$

$$\rightleftarrows$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

- 状态变量不唯一，变换结果不唯一
- 调用 ode45() 直接求解

高阶微分方程变换

➢ 例：高阶微分方程组变换

$$\begin{cases} f(t,x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m)},y,\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \\ g(t,x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m)},y,\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \end{cases}$$

➢选择状态变量 $x_1=x, x_2=\dot{x}, \cdots, x_m=x^{(m-1)},$

$$x_{m+1}=y, x_{m+2}=\dot{y}, \cdots, x_{m+n}=y^{(n-1)}$$

➢由下面方程解出 $\dot{x}_m, \dot{x}_{m+n}$，仿照前面得出标准型

$$\begin{cases} f(t,x_1,x_2,\cdots,x_m,\dot{x}_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n},\dot{x}_{m+n})=0 \\ g(t,x_1,x_2,\cdots,x_m,\dot{x}_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n},\dot{x}_{m+n})=0 \end{cases}$$

例3-14 高阶微分方程组求解

- Van der Pol 方程

$$\ddot{y}(t)+[y^2(t)-1]\dot{y}(t)+y(t)=0,\ y(0)=-0.2,\ \dot{y}(0)=-0.7$$

- 选择状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -[x_1^2(t)-1]x_2(t) - x_1(t) \end{cases} \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -[x_1^2(t)-1]x_2(t) - x_1(t) \end{bmatrix}$$

```
>> f=@(t,x)[x(2); -(x(1)^2-1)*x(2)-x(1)];
>> x0=[-0.2; -0.7]; tf=20;
   [t,x]=ode45(f,[0,tf],x0); plot(t,x)
>> plot(x(:,1),x(:,2))
```

例3-15 Apollo方程数值解

- Apollo 轨迹

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{\mu^*(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu^*)}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{\mu^* y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

- 参数 $\mu = 1/82.45,\ \mu^* = 1 - \mu,$

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-\mu^*)^2 + y^2}$$

- 初值 $x(0) = 1.2,\ \dot{x}(0) = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = -1.04935751$

微分方程数值解的验证

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{\mu^*(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu^*)}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{\mu^* y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

- 引入状态变量 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}$
- 变换后结果

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_4 + x_1 - \mu^*(x_1+\mu)/r_1^3 - \mu(x_1-\mu^*)/r_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2x_2 + x_3 - \mu^* x_3/r_1^3 - \mu x_3/r_2^3 \end{cases}$$

- 参数

$$\mu = 1/82.45, \mu^* = 1 - \mu$$

$$r_1 = \sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_3^2},\ r_2 = \sqrt{(x_1-\mu^*)^2 + x_3^2}$$

- 初值

$$\boldsymbol{x}(0) = [1.2, 0, 0, -1.04935751]^{\mathrm{T}}$$

数值求解方法

- 描述微分方程（不能用匿名函数）

```
function dx=apolloeq(t,x)
mu=1/82.45; mu1=1-mu; r1=sqrt((x(1)+mu)^2+x(3)^2);
r2=sqrt((x(1)-mu1)^2+x(3)^2);
dx=[x(2); 2*x(4)+x(1)-mu1*(x(1)+mu)/r1^3-mu*(x(1)-mu1)/r2^3;
    x(4); -2*x(2)+x(3)-mu1*x(3)/r1^3-mu*x(3)/r2^3];
```

- 求解

```
>> x0=[1.2; 0; 0; -1.04935751];
   [t,y]=ode45(@apolloeq,[0,20],x0);
   plot(y(:,1),y(:,3))
```

- 问题：结果正确与否？

数值解的检验方法

- 解的检验

```
>> options=odeset; options.RelTol=1e-7;
   [t,y]=ode45(@apolloeq,[0,20],x0,options);
   plot(y(:,1),y(:,3))
```

- 不能过分依赖MATLAB直接生成的结果
  - 选择不同的控制变量
    - RelTol, AbsTol
  - 选择不同的求解算法
    - ode45, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, ode113
  - 必须检验，否则结果没有可信度

微分方程的解析解

- MATLAB 函数 dsolve()

$$Y = \texttt{dsolve}(\texttt{eqn}_1, \texttt{eqn}_2, \cdots)$$

$$Y = \texttt{dsolve}(\texttt{eqn}_1, \texttt{eqn}_2, \cdots, x)$$

- 微分方程与初始条件的描述
  - 微分方程可以由符号表达式和字符串描述
  - 微分方程尽量用符号表达式描述
  - 对初值问题字符串更方便，如果自变量不是 t 需指定

例3-16 微分方程的解析解

- 给定高阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^4y(t)}{\mathrm{d}t^4}+11\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}+41\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+61\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+30y(t)=\mathrm{e}^{-6t}\cos 5t$$

- MATLAB直接求解

```
>> syms t y;
   Y=dsolve('D4y+11*D3y+41*D2y+61*Dy+30*y=exp(-6*t)*cos(5*t)');
   pretty(simplify(Y))
```

```
>> syms t y(t);
   Y=dsolve(diff(y,4)+11*diff(y,3)+41*diff(y,2)+61*diff(y)+...
         30*y==exp(-6*t)*cos(5*t));
   pretty(simplify(Y))
```

例3-17 已知初始条件的方程求解

- 如果已知初始条件

$$y(0)=1, \dot{y}(0)=1,\ \ddot{y}(0)=0,\ y^{(3)}(0)=0$$

- 可以由下面语句直接求解

```
>> Y=dsolve('D4y+11*D3y+41*D2y+61*Dy+30*y=cos(5*t)*exp(-6*t)',...
      'y(0)=1','Dy(0)=1','D2y(0)=0','D3y(0)=0');
>> syms t y(t)
   y1=diff(y); y2=diff(y,2); y3=diff(y,3);
   Y=dsolve(diff(y,4)+11*y3+41*y2+61*y1+...
      30*y==cos(5*t)*exp(-6*t),...
      y(0)==1,y1(0)==1,y2(0)==0,y3(0)==0)
```

科学运算问题的MATLAB求解

- 3.1 线性代数问题的MATLAB求解
- 3.2 代数方程求解
- 3.3 微分方程求解
- 3.4 最优化问题的求解
- 3.5 Laplace 变换与 z 变换问题的求解

最优化问题的求解

- 最优化思想在科学研究中很重要
  - 不满足得到的普通解，追求最好的解
  - 有目的定义“最好”的指标
  - 用数值方法求解最优控制问题
  - 学会最优化的思想和解决途径，将使研究水平和认知水平提升一个档次
- 本节主要内容
  - 无约束最优化问题的求解
  - 有约束最优化的求解、最优曲线拟合

无约束最优化问题求解

- 数学描述 $\min\limits_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$
- 物理意义
  - 目标函数、决策变量
- MATLAB 求解

$$[\boldsymbol{x}, f_{\text{opt}}, \texttt{key}, \texttt{c}] = \texttt{fminsearch}(\texttt{Fun}, \boldsymbol{x}_0, \texttt{options})$$

- 求解步骤
  - 写标准型
  - 描述目标函数：M-函数或匿名函数
  - 直接求解（边界约束求解fminsearchbnd()）

有约束最优化问题的求解

- 有约束最优化问题的数学描述

$$\min_{\boldsymbol{x}\ \text{s.t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}_{\rm eq}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}_{\rm eq}\\ \boldsymbol{x}_{\rm m}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}_{\rm M}\\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}_{\rm eq}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\end{cases}} f(\boldsymbol{x})$$

- MATLAB求解

$$[\boldsymbol{x},f_{\rm opt},\texttt{key},\texttt{c}]=\texttt{fmincon}(\texttt{Fun},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}_{\rm eq},\boldsymbol{B}_{\rm eq},\boldsymbol{x}_{\rm m},\boldsymbol{x}_{\rm M},\texttt{CFun},\texttt{OPT})$$

例3-17 非线性最优化求解举例

➢ 数学问题

$$\min_{\boldsymbol{x} \text{ s.t.} \begin{cases} x_1+x_2\leqslant 0 \\ -x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 1.5 \\ x_1x_2\geqslant -10 \\ -10\leqslant x_1,x_2\leqslant 10 \end{cases}} \mathrm{e}^{x_1}(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1)$$

➢ 目标函数与约束条件

```
function y=c3exmobj(x)
y=exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
function [c,ce]=c3exmcon(x), ce=[];
c=[x(1)+x(2); x(1)*x(2)-x(1)-x(2)+1.5; -10-x(1)*x(2)];
```

➢ 求解

```
>> A=[]; B=[]; Aeq=[]; Beq=[]; xm=[-10; -10]; xM=[10; 10]; x0=[5;5];
   x=fmincon(@c3exmobj,x0,A,B,Aeq,Beq,xm,xM,@c3exmcon)
```

有时需要反复求解

- 求解函数的警告信息
  - 考虑循环语句求解

```
>> i=1; x=x0;
   while (1)
      [x,a,b]=fmincon(@c3exmobj,x,A,B,Aeq,Beq,xm,xM,@c3exmcon);
      if b>0, break; end, i=i+1;
   end
```

- 其他最优化求解程序
  - 线性规划 linprog()、二次型规划 quadprog() 等
  - 其他规划问题：整数规划、混合整数规划等

全局最优解的尝试

- 没有任何算法可以确保得出最优化全局最优解
  - 可以使用进化类算法求解，如遗传算法等
- 仿照多解方程编写搜索函数
  - 无约束最优化问题

$$[\boldsymbol{x},f_{\rm min}]=\texttt{fminunc\_global(fun,}a\texttt{,}b\texttt{,}n\texttt{,}N\texttt{)}$$

  - 有约束最优化问题

$$[\boldsymbol{x},f_{\rm min}]=\texttt{fmincon\_global(fun,}a\texttt{,}b\texttt{,}n\texttt{,}N\texttt{,}$$
$$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}_{\rm eq},\boldsymbol{B}_{\rm eq},\boldsymbol{x}_{\rm m},\boldsymbol{x}_{\rm M},\texttt{CFun,OPT)}$$

最优曲线拟合

- 数学问题
  - 已知数据： $x_i, y_i, i = 1, 2, \cdots, N$
  - 已知函数的原型 $\hat{y}(x) = f(\boldsymbol{a}, x)$
  - 目标函数

$$J = \min_{\boldsymbol{a}} \sum_{i=1}^{N} [y_i - \hat{y}(x_i)]^2 = \min_{\boldsymbol{a}} \sum_{i=1}^{N} [y_i - f(\boldsymbol{a}, x_i)]^2$$

  - 求待定系数向量 $\boldsymbol{a}$

$$[\boldsymbol{a}, J_{\mathrm{m}}] = \texttt{lsqcurvefit}(\texttt{Fun}, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{M}}, \texttt{options})$$

例3-18 由数据拟合模型

- 下面语句可以生成数据

```
>> x=[0:0.01:0.1, 0.2:0.1:1,1.5:0.5:10];
y=0.56*exp(-0.2*x).*sin(0.8*x+0.4).*cos(-0.65*x);
plot(x,y,'o',x,y)
```

- 原型函数 $y(x) = a_1 \mathrm{e}^{-a_2 x} \sin(a_3 x + a_4) \cos(a_5 x)$

```
>> F=@(a,x)a(1)*exp(-a(2)*x).*sin(a(3)*x+a(4)).*cos(a(5)*x);
a=lsqcurvefit(F,[1;1;1;1;1],x,y)
a0=[0.56;0.2;0.8;0.4;-0.65]; norm(a-a0)
x0=0:0.01:10; y0=F(a0,x0); y1=F(a,x0);
```

```
>> plot(x0,y0,x0,y1,x,y,'o')
```

多项式拟合

- 已知数据 $x_i, y_i, i = 1, 2, \cdots, N$
- 选择多项式阶次 $\boldsymbol{n}$
- MATLAB 求解 $\boldsymbol{a}$=polyfit($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,n)
- 多项式拟合

```
>> p=polyfit(x,y,6), y2=polyval(p,x0);
   p=polyfit(x,y,8); y3=polyval(p,x0);
   plot(x0,y0,x,y,’o’,x0,y2,x0,y3)
```

科学运算问题的MATLAB求解

- 3.1 线性代数问题的MATLAB求解
- 3.2 代数方程求解
- 3.3 微分方程求解
- 3.4 最优化问题的求解
- 3.5 Laplace 变换与 z 变换问题的求解

Laplace 变换与 z 变换

- Laplace变换与z变换是连续控制系统理论与离散系统理论的基础
  - 这样的变换可以将微分方程和差分方程变换成代数方程的形式，可以建立起传递函数模型
- 本节主要内容
  - Laplace 变换和反变换的计算机求解
  - z 变换与反变换的求解

Laplace 变换的MATLAB求解

- 数学基础：t 域到 s 域的变换

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = F(s)$$

- 反变换：σ 大于所有 $F(s)$ 极点的实部

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

- MATLAB求解步骤
  - 申明符号变量
  - 对函数调用laplace()或ilapace()函数

Laplace变换的性质

- 线性性质

$$\mathscr{L}[af(t) \pm bg(t)] = a\mathscr{L}[f(t)] \pm b\mathscr{L}[g(t)]$$

- 平移性质——时间延迟处理
  - 时域平移性质:

$$\mathscr{L}[f(t-a)] = \mathrm{e}^{-as}F(s)$$

  - s-域平移性质:

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

微积分性质

- 一般微分性质

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}\frac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{d}t} - \cdots - \frac{\mathrm{d}^{n-1}f(0^+)}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

- 零初值 $\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = s^nF(s)$

- 积分性质 $\mathscr{L}\left[\int_0^t\cdots\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau^n\right] = \frac{F(s)}{s^n}$

例3-19 Laplace变换

- 给定原函数 $f(t) = 1 - (1 + at)\mathrm{e}^{-at}$
- 求函数的Laplace变换

```
>> syms a t, f=1-(1+a*t)*exp(-a*t);
   laplace(f)
```

- 结果的数学形式

$$F = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} - \frac{a}{(s+a)^2}$$

例3-20 Laplace反变换

- 已知Laplace函数

$$G(s)=\frac{s+3}{s^4+2s^3+11s^2+18s+18}, R(s)=\frac{1}{s}$$

- 试求取其Laplace反变换

```
>> syms s, G=(s+3)/s/(s^4+2*s^3+11*s^2+18*s+18);
   y=ilaplace(G)
```

- 阶跃响应的曲线绘制

```
>> fplot(y,[0,10])
```

例3-21 Laplace反变换

- 已知原函数为

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3a^2}{s^3+a^3}\right],\quad a>0$$

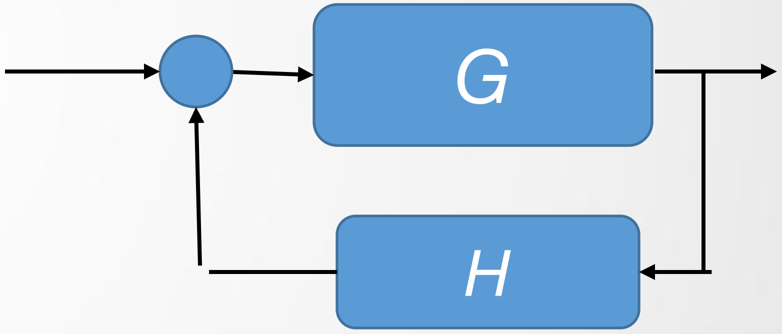
- 试求其Laplace反变换

```
>> syms s t; syms a positive; F=3*a^2/(s^3+a^3);
   f=simplify(ilaplace(F))
```

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3a^2}{s^3+a^3}\right]=\mathrm{e}^{-at}+\mathrm{e}^{at/2}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)$$

数值Laplace变换与反变换

- Laplace变换与反变换需要积分运算
  - 有时没有解析解，需要数值解
- 编写的求解函数 INVLAP_new



$$[t,y]=\mathtt{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N)$$

$$[t,y]=\mathtt{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H)$$

$$[t,y]=\mathtt{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H,U)$$

$$[t,y]=\mathtt{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H,f)$$

$$[t,y]=\mathtt{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H,\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{u})$$

例3-22 无理系统的闭环阶跃响应

- 无理系统的开环传递函数，单位负反馈

$$G(s) = \left[\frac{\sinh(0.1\sqrt{s})}{0.1\sqrt{s}}\right]^2 \frac{1}{\sqrt{s}\sinh(\sqrt{s})}$$

- 阶跃响应计算
  - 没有解析解，必须求数值解

```
>> G='(sinh(0.1*sqrt(s))/0.1/sqrt(s))^2/sqrt(s)/sinh(sqrt(s))';
   [t,y]=INVLAP_new(G,0,10,1000,1,'1/s'); plot(t,y)
```

z 变换与反变换

- 数学基础

$$\mathscr{Z}[f(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = F(z)$$

- 反变换

$$f(k) = \mathscr{Z}^{-1}[f(k)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint F(z) z^{k-1} \mathrm{d}z$$

- MATLAB求解
  - 函数 ztrans 与 iztrans 直接调用

例3-23 z反变换直接计算

- 求函数 $q/(z^{-1}-p)^m$ 的 z 反变换
  - 不能直接使用 m
  - 可以设置几个 m 样本进行变换，总结规律

```
>> syms p q z;
   for m=1:5, disp(simplify(iztrans(q/(1/z-p)^m))), end
```

  - 一般变换公式

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{q}{(z^{-1}-p)^m}\right\}=\frac{(-1)^m q}{(m-1)!\,p^{n+m}}(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$$

例3-24 给定函数的z反变换

- 离散传递函数

$$H(z)=\frac{z(5z-2)}{(z-1)(z-1/2)^3(z-1/3)}$$

- z反变换

```
>> syms z; H=z*(5*z-2)/((z-1)*(z-1/2)^3*(z-1/3));
   h=iztrans(H)
```

- 手工化简 nchoosek(n-1,2)　$(n\text{-}1)(n\text{-}2)/2$

```
>> syms n; subs(h,nchoosek(n-1,2),(n-1)*(n-2)/2)
```

微分方程求解小结

$$\dot{x} = f(t, x), x_0$$

- 一阶显式微分方程数值解法
  - 相关的函数：ode45()、ode23()、ode15s()等
- 其他微分方程如何转换
  - 状态变量的选择、转换结果不唯一性
- 微分方程的解析解 dsolve()
- 微分方程的其他解法
  - 第6章将介绍基于框图的求解方法
  - 用Simulink把微分方程画出来，用仿真方法求解
  - 这样的求解范围更广，比如延迟微分方程

最优化求解小结

- 最优化问题求解时可以描述目标函数
  - M-函数、匿名函数
  - 约束条件返回等式和不等式，不能用匿名函数
- 最优化问题求解函数
  - 无约束最优化：fminsearch、fminunc
  - 有约束最优化：fmincon、fminsearchbnd
  - 全局最优解尝试：fminunc_global, fmincon_global
- 数据拟合：lsqcurvefit()、polyfit()

Laplace 和 z 变换的小结

- 变换的目的
  - 从一个域变换成了一个域
  - 在控制中的应用——是连续、离散传递函数的基础
- 变换的步骤
  - 用 syms 申明符号变量
  - 调用 laplace()、ilaplace()、ztrans()、iztrans()
  - 化简：simplify()
- 数值Laplace变换 INVLAP_new

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD