

# 第三章 多维随机变量及其分布

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

- 3.1 二维随机变量
- 3.2 边缘分布
- 3.3 条件分布
- 3.4 相互独立的随机变量
- 3.5 两个随机变量的函数的分布

## 二维随机变量

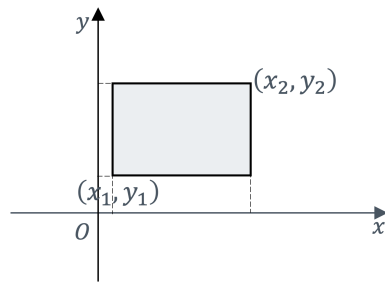
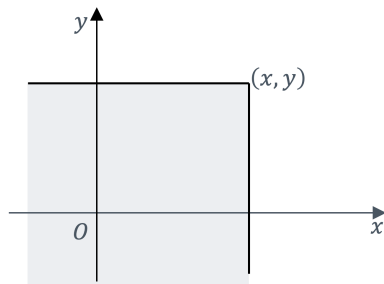
- **定义:** 随机试验  $E$  的样本空间为  $S = \{e\}$ . 设  $X = X(e)$  和  $Y = Y(e)$  是定义在样本空间  $S$  上的随机变量, 则称向量  $(X, Y)$  为 **二维随机变量**
- 例如
  - $S = \{\text{社区中的全部家庭}\}$   
 $X(e)$  为每个家庭中男孩数量,  $Y(e)$  为每个家庭中女孩数量
  - $S = \{\text{同时投掷的两个骰子点数}\}$   
 $X(e)$  为骰子 1 点数,  $Y(e)$  为骰子 2 点数
  - $S = \{\text{炮弹弹着点}\}$   
 $X(e)$  为弹着点横坐标,  $Y(e)$  为弹着点纵坐标

## 二维随机变量

■ **定义:** 设  $(X, Y)$  是二维随机变量, 对于任意实数  $x, y$ , 二元函数

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量  $(X, Y)$  的**分布函数**, 或称为随机变量  $X$  和  $Y$  的**联合分布函数** (Joint cumulative probability distribution function)



# 基本性质

■  $F(x, y)$  是变量  $x$  和  $y$  的不减函数

□ 对于任意固定的  $y$ , 如果  $x_2 > x_1$ , 则  $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$

□ 对于任意固定的  $x$ , 如果  $y_2 > y_1$ , 则  $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$

■  $0 \leq F(x, y) \leq 1$  且

□ 对于任意固定的  $y$ , 有  $F(-\infty, y) = 0$

□ 对于任意固定的  $x$ , 有  $F(x, -\infty) = 0$

□  $F(-\infty, -\infty) = 0, F(\infty, \infty) = 1$

■  $F(x+0, y) = F(x, y), F(x, y+0) = F(x, y)$ , 即  $F(x, y)$  是  $x$  和  $y$  右连续

■ 对于任意  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 满足  $x_1 < x_2$  和  $y_1 < y_2$ , 有

$$F(x_2, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) \geq 0$$

# 离散型的随机变量

- **定义:** 如果二维随机变量  $(X, Y)$  的全部可能取值是有限对或可列无限多对, 则称  $(X, Y)$  为**离散型的随机变量**
- **定义:** 设  $(X, Y)$  的可能取值为  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ . 记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

为  $(X, Y)$  的**分布律**, 或  $X$  和  $Y$  的**联合分布律**, 满足

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

## 例 1

- 设随机变量  $X$  在 1, 2, 3, 4 四个数中随机取值, 随机变量  $Y$  在  $1 \sim X$  中随机取值. 试求  $(X, Y)$  的分布律

**解答** 由乘法公式容易求得, 对于  $i = 1, 2, 3, 4, j \leq i$  有

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\}P\{X = i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4}$$

于是  $(X, Y)$  的分布律为

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 1$	$1/4$	$1/8$	$1/12$	$1/16$
$Y = 2$	0	$1/8$	$1/12$	$1/16$
$Y = 3$	0	0	$1/12$	$1/16$
$Y = 4$	0	0	0	$1/16$

# 连续型的随机变量

- **定义:** 对于二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数  $F(X, Y)$ , 如果存在非负可积函数  $f(x, y)$  对于任意  $x, y$  有

$$F(X, Y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

则称  $(X, Y)$  为连续型的随机变量

- 函数  $f(x, y)$  称为二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的概率密度, 或称为随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度
- 与离散型的随机变量有什么区别



# 基本性质

- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1$
- 设  $G$  是  $xOy$  平面上的区域, 则  $(X, Y)$  落在  $G$  内的概率是

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

- 若  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

## 例 2

- 设随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求分布函数  $F(x, y)$

解答 (1) 根据定义有

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy \\ &= \begin{cases} 2 \int_0^x e^{-2x} \int_0^y e^{-y} dy dx, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

## 例 2

- 设随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 求概率  $P\{Y \leq X\}$

解答 (2) 根据定义有

$$\begin{aligned} P\{Y \leq X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f(x, y) dy dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2x} \int_0^x e^{-y} dy dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} (1 - e^{-x}) e^{-2x} dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## $n$ 维随机变量

- **定义:** 随机试验  $E$  的样本空间为  $S = \{e\}$ . 设

$$X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \cdots, X_n = X_n(e)$$

是定义在样本空间  $S$  上的随机变量, 则称向量  $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$  为  $n$  维随机变量或  $n$  维随机向量

- 对于任意实数  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ,  $n$  元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n\}$$

称为  $n$  维随机变量  $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$  的分布函数, 或称为随机变量  $X_1, X_2, \cdots$  和  $X_n$  的联合分布函数

- $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  的性质与  $F(x, y)$  相似

- 3.1 二维随机变量
- 3.2 边缘分布
- 3.3 条件分布
- 3.4 相互独立的随机变量
- 3.5 两个随机变量的函数的分布

# 边缘分布

- **定义:** 二维随机变量  $(X, Y)$  具有分布函数  $F(x, y)$ , 则

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < \infty, Y \leq y\} = F(\infty, y)$$

分别称为二维随机变量  $(X, Y)$  的关于  $X$  和  $Y$  的**边缘分布函数**

- **定义:** 离散型的随机变量  $X$  和  $Y$  的联合分布函数为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$

关于  $X$  和  $Y$  的边缘分布律为

$$p_{i\cdot} = P\{X \leq x_i\} = \sum_{y_j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y \leq y_j\} = \sum_{x_i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots$$

## 例 1

- 一整数  $N$  等可能地在  $1, 2, \dots, 10$  十个值中取一个值. 设  $D = D(N)$  是能整除  $N$  的正整数的个数,  $F = F(N)$  是能整除  $N$  的素数的个数. 试写出  $D$  和  $F$  的联合分布律和边缘分布律

解答

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
$F$	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$	$D = 4$	$P\{F = j\}$
$F = 0$	$1/10$	0	0	0	$1/10$
$F = 1$	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
$F = 2$	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D = i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

## 课堂练习 1

- 某社区 15% 家庭无孩子, 20% 家庭有 1 个孩子, 35% 家庭有 2 个孩子, 30% 家庭有 3 个孩子. 随机选取 1 个家庭, 写出男孩数量  $B$  与女孩数量  $G$  的边缘分布律



## 课堂练习 1

- 某社区 15% 家庭无孩子, 20% 家庭有 1 个孩子, 35% 家庭有 2 个孩子, 30% 家庭有 3 个孩子. 随机选取 1 个家庭, 写出男孩数量  $B$  与女孩数量  $G$  的边缘分布律

解答 已知  $B + G$  取值为 1, 2, 3, 容易得到

	$G = 0$	$G = 1$	$G = 2$	$G = 3$	$P\{B = j\}$
$B = 0$	0.15	0.1	0.0875	0.0375	0.3750
$B = 1$	0.1	0.175	0.1125	0	0.3875
$B = 2$	0.0875	0.1125	0	0	0.2000
$B = 3$	0.0375	0	0	0	0.0375
$P\{G = i\}$	0.3750	0.3875	0.2000	0.0375	1

# 边缘分布

- **定义:** 二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ , 则  $(X, Y)$  关于  $X$  和  $Y$  的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < \infty, Y \leq y\} = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

- **定义:** 连续型的随机变量  $X$  和  $Y$  的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

## 例 2

- 设随机变量  $X$  和  $Y$  具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘概率密度  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$

解答

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

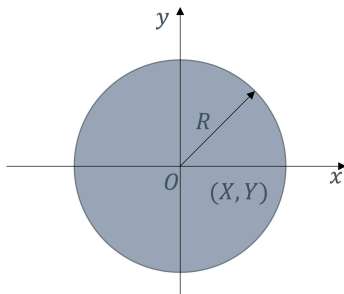
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

## 课堂练习 2

- 设一个圆的半径为  $R$ , 圆心在  $O$ , 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量  $(X, Y)$ , 其联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

- (1) 确定  $c$ , (2) 求边缘概率密度  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$



## 课堂练习 2

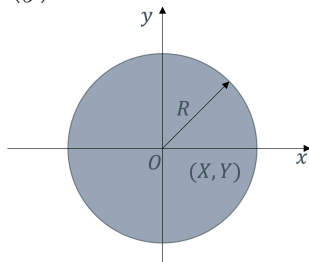
- 设一个圆的半径为  $R$ , 圆心在  $O$ , 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量  $(X, Y)$ , 其联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

(1) 确定  $c$ , (2) 求边缘概率密度  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$

解答 (1) 确定  $c$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \pi R^2 c = 1 \\ \implies c &= \frac{1}{\pi R^2} \end{aligned}$$

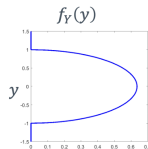
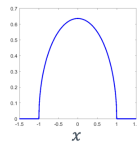
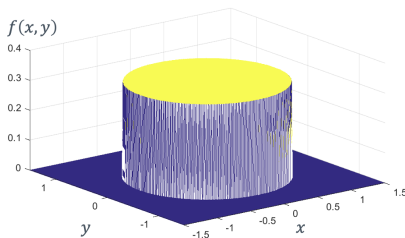


## 课堂练习 2

解答 求边缘概率密度  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, \quad x^2 \leq R^2$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & x^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 > R^2 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y^2 \leq R^2 \\ 0, & y^2 > R^2 \end{cases}$$



## 例 3

- 设二维随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

求边缘概率密度  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$

解答 由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \rho^2 \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

于是

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2} dy \end{aligned}$$

## 例 3

解答 令

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)$$

则有

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

同理

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

- 称  $(X, Y)$  服从 **二维正态分布**
- 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布, 且与  $\rho$  无关
- 一般来说, 由边缘分布不能确定随机变量的联合分布



- 3.1 二维随机变量
- 3.2 边缘分布
- 3.3 条件分布
- 3.4 相互独立的随机变量
- 3.5 两个随机变量的函数的分布

# 条件分布

- **定义:** 二维离散型随机变量  $(X, Y)$ , 若对于固定的  $j$  有  $P\{Y = y_j\} > 0$ , 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

为在  $Y = y_j$  条件下随机变量  $X$  的**条件分布律**

- 同理, 若对于固定的  $i$  有  $P\{X = x_i\} > 0$ , 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

为在  $X = x_i$  条件下随机变量  $Y$  的**条件分布律**

## 例 1

- 机器人完成两道工序——紧固 3 只螺栓, 焊接 2 处焊点, 随机变量  $X, Y$  分别为其完成结果不良的数量,  $(X, Y)$  的联合分布律如下, 求  $P\{Y = j|X = 1\}$

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$P\{Y = j\}$
$Y = 0$	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
$Y = 1$	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
$Y = 2$	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X = i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1

解答 由  $P\{Y = j|X = 1\} = \frac{P\{X=1, Y=j\}}{P\{X=1\}}$ , 计算得

$Y = j$	0	1	2
$P\{Y = j X = 1\}$	6/9	2/9	1/9

## 课堂练习 1

- 机器人完成两道工序——紧固 3 只螺栓, 焊接 2 处焊点, 随机变量  $X, Y$  分别为其完成结果不良的数量,  $(X, Y)$  的联合分布律如下, 求  $P\{X = i|Y = 0\}$

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$P\{Y = j\}$
$Y = 0$	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
$Y = 1$	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
$Y = 2$	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X = i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1

## 例 2

- 已知射击一次命中概率是  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 射击直至击中目标两次为止.  $X$  表示第一次命中时的射击次数,  $Y$  表示第二次命中时的射击次数. 计算  $X$  和  $Y$  的联合分布律和条件分布律

解答  $X$  和  $Y$  的联合分布律为

$$P\{X = m, Y = n\} = p^2(1 - p)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, m = 1, 2, \dots$$

又

$$\begin{aligned} P\{X = m\} &= \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1 - p)^{n-2} = (1 - p)^{m-1}p \end{aligned}$$

## 例 2

解答 同理有

$$\begin{aligned} P\{Y = n\} &= \sum_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

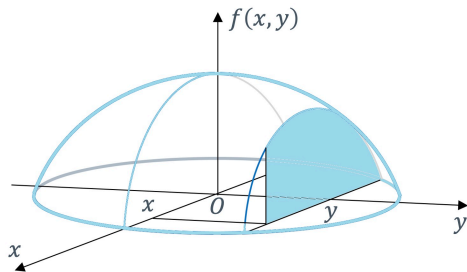
于是

$$\begin{aligned} P\{Y = n|X = m\} &= \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{X = m\}} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(1-p)^{m-1}p} = p(1-p)^{n-m-1} \\ P\{X = m|Y = n\} &= \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{Y = n\}} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

# 条件分布

- 对于二维连续型随机变量  $(X, Y)$ , 有

$$\begin{aligned} P\{X \leq x | Y = y\} &= \frac{P\{X \leq x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{\varepsilon f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_Y(y)} \end{aligned}$$



# 条件分布

- **定义:** 二维连续型随机变量  $(X, Y)$  有概率密度  $f(x, y)$ , 及关于  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y)$ , 称

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

为在  $Y = y$  条件下,  $X$  的**条件概率密度**, 称

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x|Y = y\} = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

为在  $Y = y$  条件下,  $X$  的**条件分布函数**

- 同理有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y|X = x\} = \int_{-\infty}^y \frac{f(y, x)}{f_X(x)} dy$$



## 例 4

- 设数  $X$  在区间  $(0, 1)$  等可能随机取值, 当观察到  $X = x$ ,  $(0 < x < 1)$  时,  $Y$  在区间  $(x, 1)$  等可能随机取值, 求  $f_Y(y)$

解答 根据题意知  $X$  具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对于任意给定  $x \in (0, 1)$ , 在  $X = x$  的条件下  $Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

## 例 4

解答 于是  $X$  和  $Y$  的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{Y|X}(y|x)f_X(x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

得到关于  $Y$  的边缘概率密度为

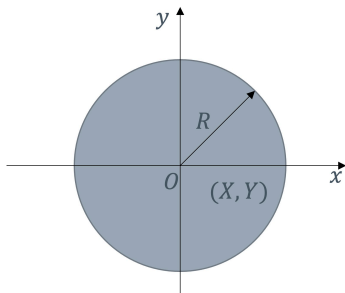
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \\ &= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x}dx = \ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

## 课堂练习 2

- 设一个圆的半径为  $R$ , 圆心在  $O$ , 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量  $(X, Y)$ , 其联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

(3) 求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$  和  $f_{Y|X}(y|x)$



## 课堂练习 2

- 设一个圆的半径为  $R$ , 圆心在  $O$ , 其上点为均匀分布, 点的坐标为随机变量  $(X, Y)$ , 其联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

(3) 求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$  和  $f_{Y|X}(y|x)$

解答 (3) 根据 (1) 和 (2) 知

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & x^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 > R^2 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y^2 \leq R^2 \\ 0, & y^2 > R^2 \end{cases}$$

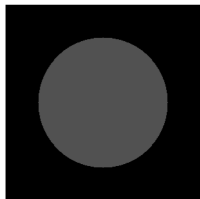
## 课堂练习 2

解答 于是

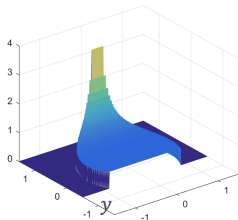
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}}, & x^2 \leq R^2 - y^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}, & y^2 \leq R^2 - x^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

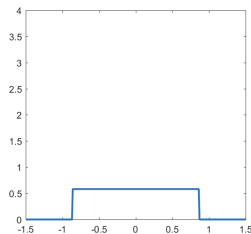
$f(x, y)$



$f_{X|Y}(x|y)$



$f_{X|Y}(x|y)$



- 3.1 二维随机变量
- 3.2 边缘分布
- 3.3 条件分布
- 3.4 相互独立的随机变量
- 3.5 两个随机变量的函数的分布

# 相互独立的随机变量

- **定义:** 如果对任意两个实数集  $A$  和  $B$ , 满足

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$$

则称  $A$  和  $B$  是相互独立的

- 如果  $X$  和  $Y$  是相互独立的, 则

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

- 当  $X$  和  $Y$  是离散随机变量时, 有

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

- 当  $X$  和  $Y$  是连续随机变量时, 有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

## 例 1

- 一负责人到达办公室的时间均匀分布在  $8 \sim 12$  时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在  $7 \sim 9$  时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率

**解答** 设  $X$  和  $Y$  分别是两人到达办公室的时间, 由假设知概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8 < x < 12 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 7 < y < 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为  $X$  和  $Y$  相互独立, 故  $(X, Y)$  的概率密度为

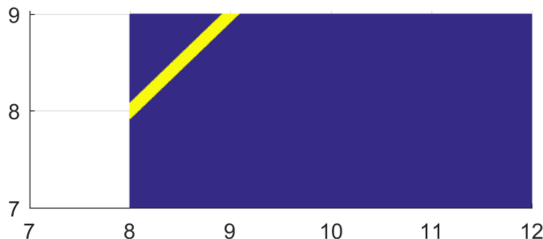
$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & 8 < x < 12, 7 < y < 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



## 例 1

解答 所求的概率为

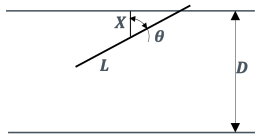
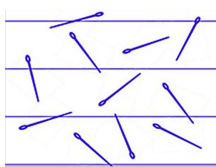
$$\begin{aligned} P\left\{|X - Y| \leq \frac{1}{12}\right\} &= \iint_G f(x, y) dx dy = \frac{1}{8} \times (G \text{的面积}) \\ &= \frac{1}{8} \times \left( \frac{1}{2} \left( \frac{13}{12} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{11}{12} \right)^2 \right) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$



- 18 世纪, Buffon 提出以下问题: 设我们有一个以平行且等距木纹铺成的地板, 随意抛一支长度比木纹之间距离小的针, 求针和其中一条木纹相交的概率

**解答** 设线间距离  $D$ , 针长  $L$ , 针的角度  $\theta \sim U(0, \pi/2)$ , 针中心至线的距离  $X \sim U(0, D/2)$ , 于是

$$\begin{aligned}
 P\left\{X < \frac{L}{2}\cos\theta\right\} &= \iint_{x < \frac{L}{2}\cos\theta} f(x, y) dx dy \\
 &= \iint_{x < \frac{L}{2}\cos\theta} f_X(x) f_\theta(y) dx dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{L}{2}\cos\theta} \frac{1}{\pi/2} \frac{1}{D/2} dx dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{2L\cos y}{\pi D} dy = \frac{2L}{\pi D}
 \end{aligned}$$



# 蒙特卡洛方法

- 由 20 世纪 40 年代美国在第二次世界大战中研制原子弹的“曼哈顿计划”计划的成员乌拉姆和冯·诺伊曼首先提出,以驰名世界的赌城—摩纳哥的 Monte Carlo 来命名这种方法,为它蒙上了一层神秘色彩. 1777 年,法国数学家布丰提出用投针实验的方法求圆周率  $\pi$ , 这被认为是蒙特卡罗方法的起源
- 针对 Buffon 问题, 取  $L = D/2$ , 概率为  $1/\pi$

试验者	时间	投掷次数	相交次数	圆周率的估计值
Wolf	1850 年	5000	2532	3.1596
Smith	1855 年	3204	1218.5	3.1554
C.De Morgan	1860 年	600	382.5	3.137
Fox	1884 年	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901 年	3408	1808	3.1415929

## $n$ 维随机变量

### ■ $n$ 维随机变量 $(X_1, \dots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$$

### ■ 概率密度函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

### ■ 边缘分布函数

$$F_{X_k}(x_k) = F(\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty)$$

$$F_{X_k, X_l}(x_k, x_l) = F(\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty, x_l, \infty, \dots, \infty)$$

### ■ 边缘概率密度

$$f_{X_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_n$$

$$f_{X_k, X_l}(x_k, x_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_{l-1} dx_{l+1} \cdots dx_n$$

- **定义:** 若对于所有的  $x_1, \dots, x_n$  有

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称  $(X_1, \dots, X_n)$  **相互独立**

- **定义:** 若对于所有的  $x_1, \dots, x_n$  和  $y_1, \dots, y_n$  有

$$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = F(x_1, \dots, x_n)F(y_1, \dots, y_n)$$

则称  $(X_1, \dots, X_n)$  和  $(Y_1, \dots, Y_n)$  **相互独立**

- **定理:** 设  $(X_1, \dots, X_n)$  和  $(Y_1, \dots, Y_n)$  相互独立, 则  $X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 和  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 相互独立. 又若  $h$  和  $g$  是连续函数, 则  $h(X_1, \dots, X_m)$  和  $g(Y_1, \dots, Y_n)$  相互独立

- 3.1 二维随机变量
- 3.2 边缘分布
- 3.3 条件分布
- 3.4 相互独立的随机变量
- 3.5 两个随机变量的函数的分布

## $Z = X + Y$ 的分布

- 设  $X$  和  $Y$  是二维连续型随机变量, 具有概率密度  $f(x, y)$ , 则  $Z = X + Y$  仍为连续型随机变量, 其概率密度分别为

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy$$
$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx$$

- 若  $X$  和  $Y$  相互独立, 设  $(X, Y)$  关于  $X$  和  $Y$  的边缘概率密度分别为  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ , 则

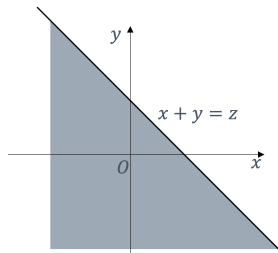
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

这两个公式称为  $f_X$  和  $f_Y$  的卷积公式, 记为  $f_X * f_Y$

# $Z = X + Y$ 的分布

## ■ 讨论 $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} \\ &= P\{X \leq z - Y\} = F_X(z - Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) d(x + y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^z f(u - y, y) du \\ &= \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^{\infty} f(u - y, y) dy \end{aligned}$$





## 例 1

- 设  $X$  和  $Y$  是两个独立的随机变量, 且  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$ , 求  $Z = X + Y$  的概率密度

解答 由标准正态分布知

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx \end{aligned}$$

令  $t = x - \frac{z}{2}$ , 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

则  $Z$  服从  $N(0, 2)$  分布

- 设  $X$  和  $Y$  是两个独立的随机变量, 且  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$ , 则  $Z = X + Y$  满足

$$Z \sim N(0, 2)$$

- 设  $X$  和  $Y$  是两个独立的随机变量, 且  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 则  $Z = X + Y$  满足

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是  $n$  个独立的随机变量, 且  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , 则  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  满足

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布

## 例 2

- 在一简单电路中, 两个串联电阻  $R_1$  和  $R_2$  相互独立, 概率密度均为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $R = R_1 + R_2$  的概率密度

解答  $R$  的概率密度为

$$\begin{aligned} f_R(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx \\ &= \begin{cases} \int_0^z \frac{10-x}{50} \frac{10-(z-x)}{50} dx = \frac{600z-60z^2+z^3}{15000}, & 0 \leq z < 10 \\ \int_{z-10}^{10} \frac{10-x}{50} \frac{10-(z-x)}{50} dx = \frac{(20-z)^2}{15000}, & 10 \leq z \leq 20 \end{cases} \end{aligned}$$

## $Z = Y/X$ 的分布、 $Z = XY$ 的分布

- 设  $X$  和  $Y$  是二维连续型随机变量, 具有概率密度  $f(x, y)$ , 则  $Z = Y/X$ 、 $Z = XY$  仍为连续型随机变量, 其概率密度分别为

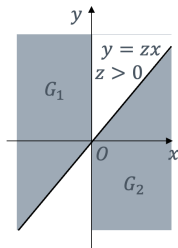
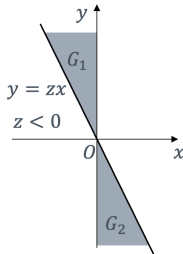
$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx$$
$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/|x| f(x, z/x) dx$$

- 若  $X$  和  $Y$  相互独立, 设  $(X, Y)$  关于  $X$  和  $Y$  的边缘概率密度分别为  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ , 则

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx$$
$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/|x| f_X(x) f_Y(z/x) dx$$

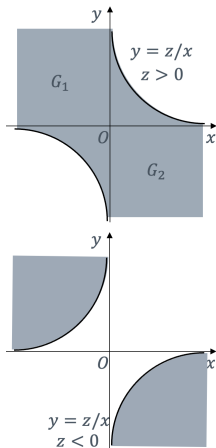
# $Z = Y/X$ 的分布

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{Y/X \leq z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{\infty} f(x, y) dy + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{\infty} f(x, xu) d(xu) + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x, xu) d(xu) \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_z^{-\infty} x f(x, u) du + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^z x f(x, xu) du \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^z (-x) f(x, xu) du + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^z x f(x, xu) du \\ &= \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^0 (-x) f(x, xu) du + \int_{-\infty}^z du \int_0^{\infty} x f(x, xu) dx \\ &= \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xu) dx \end{aligned}$$



# $Z = XY$ 的分布

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{z/x}^{\infty} f(x, y) dy + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z/x} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{z/x}^{\infty} f(x, u/x) d(u/x) + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z/x} f(x, u/x) d(u/x) \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_z^{-\infty} 1/x f(x, u/x) du + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^z 1/x f(x, u/x) du \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^z (-1/x) f(x, u/x) du + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^z 1/x f(x, u/x) du \\ &= \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^0 (-1/x) f(x, u/x) dx + \int_{-\infty}^z du \int_0^{\infty} - (1/x) f(x, u/x) dx \\ &= \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^{\infty} 1/|x| f(x, u/x) dx \end{aligned}$$



## 例 4

- 某公司提供一种地震保险, 保险费率  $Y$  和保险赔付  $X$  的概率密度分别为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{25} e^{-\frac{y}{5}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设  $X$  与  $Y$  相互独立, 求  $Z = Y/X$  的概率密度

解答  $Z$  的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| g(x) f(xz) dx \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \frac{xz}{25} e^{-\frac{xz}{5}} dx = \frac{2z}{(1+z)^3}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

## $M = \max\{X, Y\}$ 的分布、 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

- 若  $X$  和  $Y$  是二维连续型随机变量, 其分布函数分别为  $F_X(x)$  和  $F_Y(y)$ , 则  $M = \max\{X, Y\}$ 、 $N = \min\{X, Y\}$  的分布函数分别为

$$P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\}$$

$$\Rightarrow F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\}$$

$$\Rightarrow F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

- 若随机变量  $X_1, \dots, X_n$  相互独立, 其分布函数分别为  $F_{X_1}(x), \dots, F_{X_n}(x)$ , 则  $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 、 $N = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)]$$



## 例 5

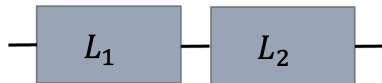
- 某公司提系统  $L$  由相互独立的子系统  $L_1$  和  $L_2$  组成, 两子系统寿命分别为  $X$  和  $Y$ , 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$ , 求在不同连接情况下,  $L$  寿命  $Z$  的概率密度

解答 (1) 串联

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



## 例 5

解答 由于  $N = \min\{X, Y\}$ , 有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$f_Z(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

## 例 5

- 某公司提系统  $L$  由相互独立的子系统  $L_1$  和  $L_2$  组成, 两子系统寿命分别为  $X$  和  $Y$ , 其概率密度分别为

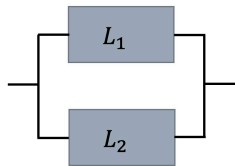
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$ , 求在不同连接情况下,  $L$  寿命  $Z$  的概率密度

**解答** (2) 并联  $Z = \max\{X, Y\}$

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} + e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



## 例 5

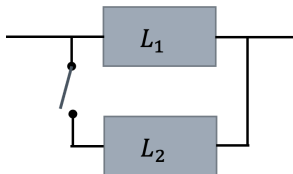
- 某公司提系统  $L$  由相互独立的子系统  $L_1$  和  $L_2$  组成, 两子系统寿命分别为  $X$  和  $Y$ , 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$ , 求在不同连接情况下,  $L$  寿命  $Z$  的概率密度

解答 (3) 备用电路  $Z = X + Y$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X(x) * f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}), & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$



## ■ 考试内容

- 多维随机变量及其分布、二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布、二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度、随机变量的独立性和不相关性、常用二维随机变量的分布、两个及两个以上随机变量简单函数的分布

## ■ 考试要求

- 理解多维随机变量的概念, 理解多维随机变量的分布的概念和性质. 理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布, 理解二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度
- 理解随机变量的独立性及不相关性的概念, 掌握随机变量相互独立的条件
- 掌握二维均匀分布, 了解二维正态分布的概率密度, 理解参数的概率意义
- 会求两个随机变量函数的分布, 会求多个相互独立随机变量函数的分布

*Q&A*

*Thank you!*

感谢您的聆听和反馈