第一章 基本概念

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

随机试验

- 确定性现象：在一定条件下必然出现的现象
- 随机现象：决策变量只能取值 0 或 1
  - 在一定条件下事先无法准确预知结果的现象
  - 具有统计规律性


随机试验

- **随机试验**: 对随机现象的实现，或者对其观察
  - 观察投币向上的面（实现、观察）

试验者	抛掷次数 (n)	正面次数 (r)	正面频率 (r/n)
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson K	24000	12012	0.5005

  - 记录每天的天气（观察）

随机试验

- 随机试验特征
  - 可重复性: 可以在相同的条件下重复进行
  - 可观察性: 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果
  - 不确定性: 每次试验出现的结果事先不能准确预知, 但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个
- 满足上述特征的试验称为随机试验, 记为 E


目录

样本空间

- **样本空间**: 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, **记为** S
- **样本点**: S 的一个元素, E 的一个结果
  - 新生儿性别 $S = \{\text{男}, \text{女}\}$
  - 七匹马比赛结果 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
  - 投掷两枚硬币结果 $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$
  - 两个骰子投掷结果 $S = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - 一个晶体管的寿命 $S = \{x \mid 0 \le x < +\infty\}$
  - 考试成绩 $S = \{x \mid 0 \le x \le 100\}$

随机事件

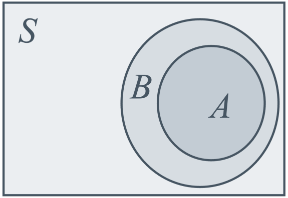
- 随机事件: 随机试验 E 的样本空间 S 的子集, 记为 A
  - 事件新生儿为男孩 $A = \{\text{男}\}$
  - 事件三号马获胜 $A = \{3\}$
  - 事件两枚硬币相同面朝上 $A = \{(H, H), (T, T)\}$
  - 事件两个骰子和为 7 $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
  - 事件晶体管寿命不超过 5 小时 $A = \{x \mid 0 \leq x < 5\}$
  - 考试成绩不及格 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 60\}$

随机事件

- 基本事件: 样本空间 S 中一个样本点组成的子集
  - 事件新生儿为男孩 $A=\{男\}$
  - 事件两枚硬币均正面朝上 $A=\{(H,H)\}$
- 必然事件: 由样本空间 S 所有样本点组成
  - 事件两个骰子点数和大于 1
  - 考试成绩小于 0
- 不可能事件: 不包含任何样本点, 记为 $\varnothing$
  - 事件两个骰子点数和大于 12
  - 考试成绩大于 100

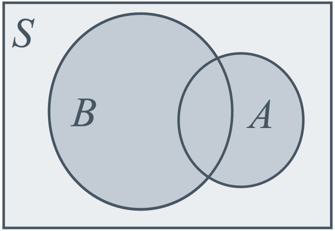
事件之间的关系与事件的运算

- 包含 (Contain)
  - 若事件 A 发生必然事件 B 发生, 记为 $A \subset B$
  - 考试成绩不到 50 分 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 50\}$, 考试成绩不及格 $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 60\}$, 则 $A \subset B$



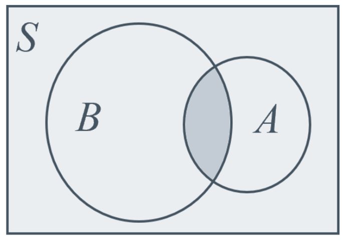
- 相等 (Contain)
  - 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 记为 $A = B$

- 和事件 (Union)
  - 若 A 与 B 中至少有一个发生, 记为 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
  - 新生儿为男孩 $A = \{\text{男}\}$, 新生儿为女孩 $B = \{\text{女}\}$, 则 $A \cup B = \{\text{男}, \text{女}\}$



- $\cup_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件的和事件, $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件的和事件

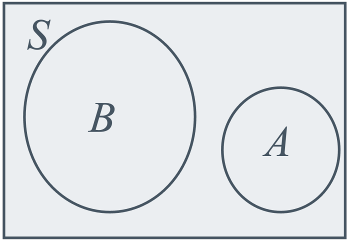
- 积事件 (Intersection)
  - 若 A 和 B 同时发生, 记为 $AB = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
  - 考试成绩不到 50 分 $A = \{x \mid 0 \le x \le 50\}$, 考试成绩不及格 $B = \{x \mid 0 \le x \le 60\}$, 则 $A \cap B = \{x \mid 0 \le x \le 50\}$



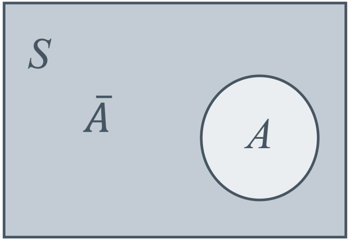
- $\cap_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件的积事件, $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件的积事件

事件之间的关系与事件的运算

- 互斥事件/互不相容 (Mutually Exclusive)
  - 若 A 和 B 不能同时发生，记为 $AB = A \cap B = \varnothing$
  - 新生儿为男孩 $A = \{男\}$, 新生儿为女孩 $B = \{女\}$，则 $A \cap B = \varnothing$
  - 考试成绩不到 50 分 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 50\}$, 考试成绩优 $B = \{x \mid 90 \leq x \leq 100\}$, 则 $A \cap B = \varnothing$



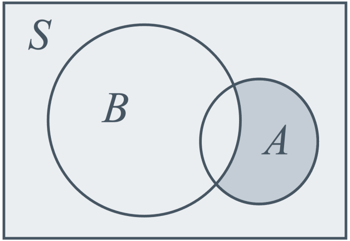
- 对立事件 (Complement)
  - 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$, 则事件 A 与事件 B 互为逆事件
  - 新生儿为男孩 $A = \{男\}$, 新生儿为女孩 $B = \{女\}$
  - 考试成绩及格 $A = \{x \mid 60 \leq x \leq 100\}$, 考试成绩不及格 $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 60\}$



- $\bar{A} = \{x \mid x \in A\}$, $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{S} = \varnothing$, $\bar{\varnothing} = S$

事件之间的关系与事件的运算

- 差事件
  - 若 A 发生但 B 不发生，记为 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
  - 考试成绩优良 $A = \{x \mid 80 \leq x \leq 100\}$，考试成绩中良 $B = \{x \mid 70 \leq x \leq 90\}$，则 $A - B = \{x \mid 90 \leq x \leq 100\}$



- $A - B = A\bar{B}$

事件之间的关系与事件的运算

- **交换律（Commutative Laws）**
  - $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
- **结合律（Associative Laws）**
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **分配律（Distributive Laws）**
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **德摩根定律（DeMorgen's Laws）**
  - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

目录

频率

- 频率（Relative frequency）：在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中
  - 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数
  - 比值 n_A/A 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$
- 基本性质
  - $0 \leq f_n(A) \leq 1$
  - $f_n(S) = 1$
  - 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \frac{n}{A_1} + \frac{n}{A_2} + \cdots + \frac{n}{A_k}$$

频率

- 字母频率

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	R	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		

概率

- 概率（Probability）：设 E 是随机试验, S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果满足
  - 非负性: 对于每一个事件 A, 有 $P(A) \geq 0$
  - 规范性: 对于必然事件 S, 有 $P(S) = 1$
  - 可列可加性: 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$, 有
  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$
- 当 $n \to \infty$ 时, 频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$, 即
$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

概率

- 性质 1: $P(\varnothing) = 0$

  证明 对于互不相容事件序列 $A_1, A_2, \cdots$, 设

$$A_1 = S,\ A_i = \varnothing,\ i > 1$$

  由可列可加性得

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \\ &= P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing) \end{aligned}$$

  由非负性知 $P(\varnothing) \geq 0$, 故由上式知 $P(\varnothing) = 0$

- 不可能事件 $\Rightarrow$ 概率为 0（反推，不成立）

概率

- 性质 2: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

证明 设 $A_i = \varnothing$, $i > n$, 由可列可加性得

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ & = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0 \\ & = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \end{aligned}$$

- 概率的有限可加性

- 性质 3: 设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geq P(A)$$

证明 由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B-A)$, 且 $A(B-A) = \varnothing$, 由可列可加性得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) + P(B-A) \\ \Rightarrow P(B-A) &= P(B) - P(A) \end{aligned}$$

由非负性知 $P(B-A) \geq 0$, 则 $P(B) \geq P(A)$

- 当且仅当 $A = B$ 时，“$=$”成立

- 性质 4: 对于任一事件 A, 有

$$P(A) \leq 1$$

- 性质 5: 对于任一事件 A, 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

证明 由 $A \cup \bar{A} = S$ 且 $A\bar{A} = \varnothing$, 由有限可加性得

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

- 如何通过图形解释

概率

- 性质 6: 对于任意两个事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证明 因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$, 且 $A(B - AB) = \varnothing$, 由有限可加性得

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup (B - AB)) P(A) + P(B - AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

- 推广到多个事件的情况

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le n} P(A_i A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned}$$

例 1

- 某城市中发行 2 种报纸 A,B. 经调查, 在这 2 种报纸的订户中, 订阅 A 报的有 45%, 订阅 B 报的有 35%, 同时订阅 2 种报纸 A,B 的有 10%. 求只订一种报纸的概率

  解答

$$
\begin{aligned}
& P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) \\
& = [P(A) - P(AB)] + [P(B) - P(AB)] \\
& = [0.45 - 0.1] + [0.35 - 0.1] \\
& = 0.6
\end{aligned}
$$

课堂练习 1

- 小明带两本书去度假，他喜欢 A 书的概率是 0.5，喜欢 B 书的概率是 0.4，两本书都喜欢的概率是 0.3

  (1) 只喜欢 A 书的概率是多少
  (2) 两本书都不喜欢的概率是多少

目录

等可能概型

- 等可能概型: 具有两个共同的特点
  - 有限性: 随机试验样本空间只包含有限个元素

$$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$$

  - 等可能性: 每一个基本事件发生的可能性相同

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$$

- 由于基本事件是两两互不相容的, 于是

$$\begin{aligned}P(S)&=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\})\end{aligned}$$

- 这里 $P(\{e_i\})=\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n$

等可能概型

- **若事件 A 包含 k 个基本事件, 即**

$$A = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_k\}$$

则有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_k\}) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_k\}) \\ &= \frac{k}{n} = \frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}} \end{aligned}$$

- **等可能概型中事件 A 概率的计算公式**

例 1

- 将一枚硬币抛掷三次

(1) 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，求 $P(A_1)$
(2) 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_2)$

解答 考虑 $S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$
(1) 因 $A_1=\{HTT,THT,TTH\}$, 则

$$P(A_1)=\frac{3}{8}$$

(2) 因 $A_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}$, 则

$$P(A_2)=\frac{7}{8}$$

或者 $\bar{A}_2=\{TTT\}$, $P(A_2)=1-P(\bar{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

例 2

- 一口袋装有 6 只球，其中白球 4 只，红球 2 只. 若采用放回抽样方式，连续两次取球. 求

(1) 取到两次白球的概率
(2) 取到两次相同颜色的概率
(3) 取到至少一次白球的概率

解答　设事件 A 表示取到两次白球，事件 B 表示取到两次红球，事件 C 表示取到至少一次白球. S 中基本事件总数 $6 \times 6 = 36$

(1) A 中基本事件总数 $4 \times 4 = 16$，则 $P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
(2) B 中基本事件总数 $2 \times 2 = 4$，则 $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
A 与 B 是互不相容的事件，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9}$
(3) $P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}$

课堂练习 1

- 一口袋装有 6 只球, 其中白球 4 只, 红球 2 只. 若采用**不放回抽样**方式, 连续两次取球. 求
  (1) 取到两次白球的概率
  (2) 取到两次相同颜色的概率
  (3) 取到至少一次白球的概率
- 试分析放回抽样和不放回抽样的差异

例 3

- 将 n 个球随机放入 N $(N > n)$ 个盒子, 求每个盒子至多有一个球的概率

解答　根据古典概型, 有

$$p = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}$$

- 假设每人的生日随机等可能出现在一年中的任一天, 那么班级 n 人生日各不同的概率为

$$p = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n}$$

因此班级 n 人至少有两人生日相同的概率为 $1-p$

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

例 4

- 设有 N 件产品, 其中有 D 件次品, 今从中任取 n 件, 问其中恰有 k $(k \leq D)$ 件次品的概率是多少

  解答

  - N 件产品中任取 n 件, 取法有 C_N^n 种
  - D 件次品中任取 k 件, 取法有 C_D^k 种
  - $N-D$ 件正品中任取 $n-k$ 件, 取法有 C_{N-D}^{n-k} 种
  - 于是所求的概率为

$$p = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

- 超几何分布的概率公式

例 5

- 袋中有 a 只白球，b 只红球，k $(k \le a+b)$ 个人依次从袋中取一个球

  (1) 采用放回抽样方式，求第 i 个人取到白球的概率
  (2) 采用不放回抽样方式，求第 i 个人取到白球的概率

解答 (2) 对于不放回抽样方式, k 个人依次取球的基本事件总数

$$A_{a+b}^{k} = \frac{(a+b)!}{[(a+b)-k]!}$$

第 i 个人取到白球的取法数 a, 其他 $i1$ 个人依次取球的基本事件总数

$$A_{a+b-1}^{k-1} = \frac{(a+b-1)!}{[(a+b-1)-(k-1)]!} = \frac{(a+b-1)!}{[(a+b)-k]!}$$

于是第 i 个人取到白球的概率为

$$p = \frac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}$$

例 6

- 在 $1-2000$ 中随机取一个数，既不能被 6，也不能被 8 整除的概率是多少

解答 设 A 为事件“取到的数能被 6 整除”，包含 333 个基本事件;
B 为事件“取到的数能被 8 整除”，包含 250 个基本事件;
AB 为事件“取到的数能被 24 整除”，包含 83 个基本事件，于是

$$
\begin{aligned}
P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B)\\
&= 1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\
&= 1-[\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}]\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

例 7

- 将 15 名新生随机地平均分配到三个班级，这 15 名新生中有 3 名是优秀生

(1) 每个班个分配到 1 名优秀生的概率是多少
(2) 3 名优秀生分配在同一班级的概率是多（课堂练习 2）

解答 (1) 15 个学生分到第一个班的分法数量 C_{15}^5，剩下 10 个学生分到第二个班的分法数量 C_{10}^5，剩下 5 个学生分到第三个班的分法数量 C_5^5，于是 15 个学生分到三个班的分法数量

$$C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$$

3 名优秀生分到三个班的分法数量 $3!$，12 名非优秀生分到三个班的分法数量 $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$，于是所求的概率为

$$p = \frac{3! C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5} = \frac{25}{91}$$

例 8

- 某接待站一周接待过 12 次来访，已知 12 次来访都在周二和周四，问是否可以推断接待事件是有规定的

  解答 假设接待时间无规定，则来访日期随机，那么 12 次来访集中在周二周四的概率为

$$p = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003$$

  即使只算工作日

$$p = \frac{2^{12}}{5^{12}} = 0.000017$$

- 实际推断原理：概率很小的事件在一次试验中几乎不可能发生

目录

例 1

- 投掷两枚硬币，其试验结果样本空间为 $S=\{HH,HT,TH,TT\}$
  (1) 如果已知第一次试验结果是正面朝上，求两次试验同一面朝上的概率
  (2) 如果已知两次试验结果中，至少有一次正面朝上，求两次试验同一面朝上的概率

  解答
  (1) 已知第一次试验结果是正面朝上的情况下，可能的试验结果是 HH,HT，则两次试验同一面朝上的概率是

$$p=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$$

  (2) 两次试验至少有一次正面朝上的概率是 $3/4$，两次正面朝上的概率是 $1/4$，则两次试验同一面朝上的概率是

$$p=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

条件概率

- 条件概率: 设 A, B 是是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率

- 条件概率 $P(\cdot|A)$ 满足概率的三个条件
  - 非负性: 对于每一个事件 B, 有 $P(B|A) \geq 0$
  - 规范性: 对于必然事件 S, 有 $P(S|A) = 1$
  - 可列可加性: 设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

例 2

- 一个盒子装有 4 个产品, 其中有 3 只一等品, 1 只二等品. 从中取产品两次, 每次任取一只, 作不放回抽样. 事件 A 为第一次取得的是一等品, 事件 B 为第二次取得的是一等品. 试求条件概率 $P(B|A)$

  解答 根据古典概型

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{3}{4} \\
P(AB) &= \frac{3\times 2}{4\times 3} = \frac{1}{2} \\
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

- 第一次取得的是一等品前提下，第二次也取得一等品的概率是 $2/3$，不同于两次均取得一等品的概率 $1/2$

课堂练习 1

- 一某人丢了钥匙，他确定有 80% 的可能性钥匙在他夹克的两个口袋里，其中在左右口袋的可能性各是 40%。他摸了左口袋，未发现钥匙。问这时钥匙在右口袋的概率是多少

- **乘法定理:** 设 $P(A) > 0$, 则

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率

- 推广至事件 A, B, C 的情形

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

- 一般

$$\begin{aligned} &P(A_1A_2\cdots A_n) \\ &= P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_1A_2\cdots A_{n-2}A_{n-1}) \\ &= P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1) \end{aligned}$$

例 3

- 设袋中装有 r 只红球 t 只白球，每次自袋中任取一球，观察颜色后放回，并再放入 a 只同色球．若连续取球 4 次，求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率

  解答 以 A_i 表示事件“第 i 次取到红球”，计算

  - 第一次取红球概率 $P(A_1) = \frac{r}{r+t}$
  - 第一次取红球条件下、第二次取红球概率 $P(A_2|A_1) = \frac{r+a}{r+t+a}$
  - 第一二次取红球条件下、第三次取白球概率 $P(\bar{A}_3|A_1A_2) = \frac{t}{r+t+2a}$
  - 第一二次取红球、第三次取白球条件下、第四次取白球概率 $P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3) = \frac{t+a}{r+t+3a}$
  - 一二次红球且三四次白球的概率

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3)P(\bar{A}_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

全概率公式

- **划分**: 设S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件，若
  - $B_iB_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n$
  - $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$

  则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分

- **定理 1**: 设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

- 上式称为全概率公式

全概率公式

- **证明** 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 则

$$\begin{aligned} A &= AS \\ &= A(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) \\ &= AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n \end{aligned}$$

  由假设 $P(B_i) > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 且 $(AB_i)(AB_j) = \varnothing$, $i \neq j$, 得到

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

- 当 $n = 2$ 时, 有 $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

贝叶斯公式

- 定理 2: 设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

解答 由条件概率的定义及全概率公式即得

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

- 当 $n = 2$ 时, 有

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

例 5

- 某元件供应商情况如下，从仓库中随机取一只元件，求该元件是次品的概率

元件制造厂	次品率	提供原件的份数
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

解答　设 A 表示“取到的是一只次品”，$B_i\ (i=1,2,3)$ 表示“所取到的产品是由第 i 家工厂提供的”，则

$$P(B_1)=0.15,\ P(B_2)=0.80,\ P(B_3)=0.05$$
$$P(A|B_1)=0.02,\ P(A|B_2)=0.01,\ P(A|B_3)=0.03$$

由全概率公式知

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)=0.0125$$

例 5

- 某元件供应商情况如下，已知取到次品，求该次品由各厂制造的概率

元件制造厂	次品率	提供原件的份数
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

解答 由贝叶斯公式知

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.01 \times 0.8}{0.0125} = 0.64$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.03 \times 0.05}{0.0125} = 0.12$$

例 6

- 美国人中肺癌患病率 0.1%, 人群中吸烟者 20%, 吸烟者肺癌患病率 0.4%, 求不吸烟者肺癌患病率

  解答　以 C 表示事件“患肺癌”，以 A 表示事件“吸烟”，按题意知

$$P(C) = 0.001,\ P(A) = 0.20,\ P(C|A) = 0.004$$

由全概率公式知

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|\bar{A})P(\bar{A})$$

于是

$$\begin{aligned} P(C|\bar{A}) &= \frac{P(C) - P(C|A)P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{P(C) - P(C|A)P(A)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{0.001 - 0.004 \times 0.2}{1 - 0.2} = 0.00025 \end{aligned}$$

例 7

- 当机器调整良好时，产品的合格率为 98%. 当机器发生故障时候，产品的合格率为 55%. 每日机器开机时，调整良好的概率为 95%. 试求某日第一件产品为合格品时，机器调整良好概率是多少

  解答　设 A 为事件“产品合格”，B 为事件“机器调整良好”，按题意知

$$P(A|B) = 0.001,\ P(A|\bar{B}) = 0.55,\ P(B) = 0.95,\ P(\bar{B}) = 0.05$$

  由贝叶斯公式知

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} \\ &= \frac{0.98 \times 0.95}{0.98 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05} = 0.97 \end{aligned}$$

- 根据以往数据分析得到的是先验概率，得到信息后修正的是后验概率

例 8

- 根据以往临床记录, 某种诊断癌症的试验具有如下效果: A 表示 “试验反应为阳性”, C 表示 “被诊断者患有癌症”, 则有 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$. 现在对自然人群进行普查, 设被试验人患有癌症的概率为 $P(C) = 0.005$, 试求 $P(C|A)$

  解答　由贝叶斯公式知

$$
\begin{aligned}
P(C|A) &= \frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})} \\
&= \frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + [1 - P(\bar{A}|\bar{C})][1 - P(C)]} \\
&= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.05 \times 0.995} = 0.087
\end{aligned}
$$

- $P(A|C)$ 和 $P(C|A)$ 存在较大的差异

目录

独立性

- 独立性: 设 A, B 是两事件, 如果满足等式
$$P(AB) = P(A)P(B)$$
则称为事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立
- 相互独立 $P(AB) = P(A)P(B)$ 与互不相容 $P(AB) = 0$ 相区分
  - A, B 互斥 $\Longrightarrow$ A, B 不相互独立
  - A, B 相互独立 $\Longrightarrow$ A, B 不互斥
- 对于 52 张扑克牌, 抽到 A 的概率为 $1/13$, 抽到黑桃的概率为 $1/4$, 计算抽到黑桃 A 的概率是多少
  - “抽取到点数”与“抽取到花色”是相互独立的
  - “抽取到花色”与“抽取到另一种花色”是互不相容的的

独立性

- 定理 1: 如果 A, B 相互独立，则

$$P(B|A) = P(B)$$

- 定理 2: 如果 A, B 相互独立，则

$$A与\bar{B} \quad \bar{A}与B \quad \bar{A}与\bar{B}$$

  皆相互独立

  证明 因为 $P(A) = P(A|\bar{B})P(\bar{B}) + P(A|B)P(B) = P(A\bar{B}) + P(AB)$, 则

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$$

  进而 $\bar{A}与B$, $\bar{A}与\bar{B}$ 相互独立

- 事件 A 表示两个骰子点数和为 7，事件 B 表示第一个骰子点数为 4, 那么 A, B 相互独立吗

独立性

- **定义**: 如果事件 A, B, C 满足等式

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B) \\
P(BC) &= P(B)P(C) \\
P(AC) &= P(A)P(C) \\
P(ABC) &= P(A)P(B)P(C)
\end{aligned}
$$

  则称事件 A, B, C 相互独立

- **推论**: 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n $(n > 2)$ 个事件, 如果对于其中任意 2 个, 3 个, $\cdots$, n 个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立

例 1

- 事件 A 表示两个骰子点数和为 7，事件 B 表示第一个骰子点数为 4, 事件 C 表示第二个骰子点数为 3，判断事件 A, B, C 独立性

  解答 计算

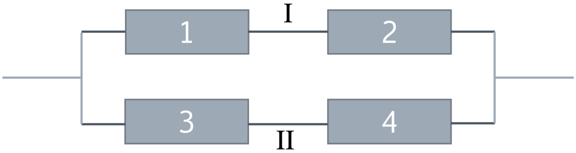
$$P(A) = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{1}{6},\ P(C) = \frac{1}{6}$$
$$P(AB) = \frac{1}{36},\ P(BC) = \frac{1}{36},\ P(AC) = \frac{1}{36}$$
$$P(ABC) = \frac{1}{36}$$

  则事件 A, B, C 两两独立，但事件 A, B, C 不相互独立

- 事件 A, B, C 两两独立 $\not\Rightarrow$ 事件 A, B, C 相互独立

例 2

- 给定一系统如图，i 号元件可靠性为 p_i $(i=1,2,3,4)$，求系统可靠性



解答 设 A_i 表示 i 号元件正常工作，则 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$，于是

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= P_1P_2 + P_3P_4 - P_1P_2P_3P_4 \end{aligned}$$

假设 $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0.9$，则

$$P(A) = 0.9639$$

例 3

- 验收一批共 100 件乐器, 若随机取 3 件, 有一件音色不纯, 则拒收该批乐器. 设一件音色不纯乐器查出音色不纯的概率是 0.95, 而一件合格乐器被误查为音色不纯的概率是 0.01, 又如果该批 100 件乐器中音色不纯的有 4 件, 求该批乐器被接收的概率

解答 设 H_i 表示抽取到的乐器中有 i 件乐器真的音色不纯, A 表示未查出音色不纯, 则

$$P(A|H_i) = 0.05^i 0.99^{(3-i)}$$

由于事件是独立的, 计算

$$P(H_0) = \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},\ P(H_1) = \frac{C_{96}^2 C_4^1}{C_{100}^3},\ P(H_2) = \frac{C_{96}^1 C_4^2}{C_{100}^3},\ P(H_1) = \frac{C_{96}^0 C_4^3}{C_{100}^3}$$

于是

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) \\ &= 0.8629 \end{aligned}$$

例 4

- 甲乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率是 $p \geq 1/2$, 问对甲而言，三局二胜有利，还是五局三胜有利

  解答 三局制甲胜的情况为胜胜、胜负胜、负胜胜, 则获胜概率

$$p_3 = pp + p(1-p)p + (1-p)pp = 3p^2 - 2p^3$$

五局制甲胜的情况为胜胜胜、负胜胜胜、胜负胜胜、胜胜负胜、负负胜胜胜、胜负负胜胜、胜胜负负胜、负胜负胜胜、负胜胜负胜、胜负胜负胜, 则获胜概率

$$\begin{aligned} p_5 &= p^3 + C_3^2 p^3(1-p) + C_4^2 p^3 (1-p)^2 \\ &= 10p^3 - 15p^4 + 6p^5 \end{aligned}$$

此外 $p_5 - p_3 = 6p^2(p-1)^2(p-1/2)$

小结

- **考试内容**
  - 随机事件与样本空间、事件的关系与运算、完备事件组、概率的概念、概率的基本性质、古典型概率、几何型概率、条件概率、概率的基本公式、事件的独立性、独立重复试验
- **考试要求**
  - 了解样本空间 (基本事件空间) 的概念, 理解随机事件的概念, 掌握事件的关系与运算
  - 理解概率、条件概率的概念, 掌握概率的基本性质, 会计算古典型概率和几何型概率, 掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式, 以及贝叶斯 (Bayes) 公式
  - 理解事件的独立性的概念, 掌握用事件独立性进行概率计算, 理解独立重复试验的概念, 掌握计算有关事件概率的方法

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈