

第二章 最优性理论

修贤超

<https://xianchaoxiu.github.io>

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

最优化问题解的存在性

■ 考虑优化问题

$$\begin{array}{ll}\min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X}\end{array}$$

- 首先分析最优解的存在性
- 然后考虑如何求出其最优解

- (Weierstrass 定理) 紧集上的连续函数一定存在最大 (最小) 值
- 而在许多实际问题中, 定义域可能不是紧的, 目标函数也不一定连续

推广的 Weierstrass 定理

- 若函数 $f : \mathcal{X} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 适当且闭, 且以下条件中任意一个成立

- $\text{dom } f = \{x \in \mathcal{X} : f(x) < +\infty\}$ 是有界的
- 存在一个常数 $\bar{\gamma}$ 使得下水平集

$$C_{\bar{\gamma}} = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq \bar{\gamma}\}$$

是非空且有界的

- f 是强制的, 即对于任一满足 $\|x^k\| \rightarrow +\infty$ 的点列 $\{x^k\} \subset \mathcal{X}$, 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = +\infty$$

则函数 f 的最小值点集 $\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq f(y), \forall y \in \mathcal{X}\}$ 非空且紧

- 三个条件在本质上都是**保证 $f(x)$ 的最小值不能在无穷远处取到**

- 当定义域不是有界闭集时, 对于强制函数

$$f(x) = x^2, x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$$

其全局最优解一定存在

- 对于适当且闭的函数

$$f(x) = e^{-x}, x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$$

不满足三个条件中任意一个, 因此不能断言其全局极小值点存在

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

无约束可微问题的最优性理论

- 无约束可微优化问题通常表示为

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

- 对于可微函数 f 和点 $x \in \mathbb{R}^n$, 如果存在向量 d 满足

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

那么称 d 为 f 在点 x 处的一个下降方向

- 一阶最优性条件是利用梯度 (一阶) 信息来判断给定点的最优性
- 在局部最优点处不能有下降方向

一阶必要条件

- 假设 f 在全空间 \mathbb{R}^n 可微. 如果 x^* 是 (1) 的一个局部极小点, 那么

$$\nabla f(x^*) = 0$$

证明 任取 $v \in \mathbb{R}^n$, 考虑 f 在点 $x = x^*$ 处的泰勒展开

$$\frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^\top \nabla f(x^*) + o(1)$$

根据 x^* 的最优性, 分别对 t 取点 0 处的左、右极限可知

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} &= v^\top \nabla f(x^*) \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} &= v^\top \nabla f(x^*) \leq 0\end{aligned}$$

- 称满足 $\nabla f(x) = 0$ 的点 x 为 f 的**稳定点 (或驻点、临界点)**

二阶最优性条件

- 对于 $f(x) = x^3$, 满足 $f'(x) = 0$ 的点为 $x^* = 0$, 但其不是局部最优解
- 假设 f 在点 x 的一个开邻域内是二阶连续可微的, 考虑

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^\top d + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 f(x)d + o(\|d\|^2)$$

则以下最优性条件成立

- (二阶必要条件) 若 x^* 是 f 的一个局部极小点, 则

$$\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \succeq 0$$

- (二阶充分条件) 若满足

$$\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \succ 0$$

则 x^* 是 f 的一个局部极小点

- **必要性** 若 $\nabla^2 f(x^*)$ 有负的特征值 $\lambda_- < 0$, 设 $\nabla^2 f(x^*)d = \lambda_- d$, 则

$$\frac{f(x^* + d) - f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{1}{2} \frac{d^\top}{\|d\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{d}{\|d\|} + o(1) = \frac{1}{2} \lambda_- + o(1)$$

当 $\|d\|$ 充分小时, $f(x^* + d) < f(x^*)$, 这和点 x^* 的最优性矛盾

- **充分性** 由 $\nabla f(x^*) = 0$ 时的二阶展开

$$\frac{f(x^* + d) - f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{d^\top \nabla^2 f(x^*) d + o(\|d\|^2)}{\|d\|^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} + o(1)$$

当 $\|d\|$ 充分小时有 $f(x^* + d) \geq f(x^*)$, 即二阶充分条件成立

例：实数情形的相位恢复

■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m r_i^2(x)$$

其中 $r_i(x) = (a_i^\top x)^2 - b_i^2, i = 1, 2, \dots, m$

■ 计算梯度和海瑟矩阵

$$\nabla f(x) = 2 \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla r_i(x) = 4 \sum_{i=1}^m ((a_i^\top x)^2 - b_i^2) (a_i^\top x) a_i$$

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m (12(a_i^\top x)^2 - 4b_i^2) a_i a_i^\top$$

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

无约束不可微问题的最优性理论

■ 考虑不可微优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (2)$$

■ 假设 f 是适当且凸的函数, 则 x^* 为 (2) 的全局极小点当且仅当 $0 \in \partial f(x^*)$

□ **必要性** 因 x^* 为全局极小点, 有

$$f(y) \geq f(x^*) = f(x^*) + 0^\top (y - x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies 0 \in \partial f(x^*)$$

□ **充分性** 如果 $0 \in \partial f(x^*)$, 那么根据次梯度的定义

$$f(y) \geq f(x^*) + 0^\top (y - x^*) = f(x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies x^* \text{ 为一个全局极小点}$$

复合优化问题的一阶必要条件

- 考虑一般复合优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + h(x) \quad (3)$$

其中 f 为光滑函数 (可能非凸), h 为凸函数 (可能非光滑)

- **定理** 令 x^* 为复合优化问题 (3) 的一个局部极小点, 那么

$$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$$

- 由于目标函数可能是整体非凸的, 因此一般没有一阶充分条件

例: ℓ_1 范数优化问题

■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + \mu \|x\|_1$$

■ $\|x\|_1$ 不是可微的, 但可以计算其次微分

$$\partial_i \|x\|_1 = \begin{cases} \{1\}, & x_i > 0 \\ [-1, 1], & x_i = 0 \\ \{-1\}, & x_i < 0 \end{cases}$$

■ 若 x^* 是局部最优解, 则 $-\nabla f(x^*) \in \mu \partial \|x^*\|_1$, 即

$$\nabla_i f(x^*) = \begin{cases} -\mu, & x_i^* > 0 \\ a \in [-\mu, \mu], & x_i^* = 0 \\ \mu, & x_i^* < 0 \end{cases}$$

■ 无约束优化问题及其最优性条件

问题	一阶条件	二阶条件
可微问题	$\nabla f(x^*) = 0$ (必要)	必要/充分
凸问题	$0 \in \partial f(x^*)$ (充要)	—
复合优化问题	$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$ (必要)	—
非凸非光滑	$0 \in \partial f(x^*)$ (必要)	—

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

■ 一般的约束优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

■ 可行域定义为

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \text{ 且 } c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}\}$$

- 通过将 \mathcal{X} 的示性函数加到目标函数中可以得到无约束优化问题, 但是转化后问题的目标函数是**不连续的、不可微的以及不是有限的**

拉格朗日函数

- 拉格朗日函数 $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i c_i(x)$$

- λ_i 为第 i 个不等式约束对应的拉格朗日乘子
- ν_i 为第 i 个等式约束对应的拉格朗日乘子

- 拉格朗日对偶函数 $g: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow [-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu) \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \nu_i c_i(x)) \end{aligned}$$

拉格朗日对偶问题

■ 拉格朗日对偶问题

$$\max_{\lambda \geq 0, \nu} g(\lambda, \nu) = \max_{\lambda \geq 0, \nu} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu)$$

■ 设 p^* 是原始问题的最优解, q^* 是对偶问题的最优解

■ 弱对偶性 $q^* \leq p^*$

- 对凸问题与非凸问题都成立
- 可导出复杂问题的非平凡下界

■ 强对偶性 $q^* = p^*$

- (通常) 对凸问题成立
- 称保证凸问题强对偶性成立的条件为约束品性

例：线性规划问题的对偶

■ 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

■ 拉格朗日函数

$$L(x, s, \nu) = c^\top x + \nu^\top (Ax - b) - s^\top x = -b^\top \nu + (A^\top \nu - s + c)^\top x$$

■ 对偶函数

$$g(s, \nu) = \inf_x L(x, s, \nu) = \begin{cases} -b^\top \nu, & A^\top \nu - s + c = 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

例：线性规划问题的对偶

■ 对偶问题

$$\begin{array}{ll} \max_{s, \nu} & -b^\top \nu \\ \text{s.t.} & A^\top \nu - s + c = 0 \\ & s \geq 0 \end{array} \quad \overset{y = -\nu}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{ll} \max_{s, y} & b^\top y \\ \text{s.t.} & A^\top y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

■ 若保留约束 $x \geq 0$, 则拉格朗日函数为

$$L(x, y) = c^\top x - y^\top (Ax - b) = b^\top y + (c - A^\top y)^\top x$$

■ 对偶问题需要将 $x \geq 0$ 添加到约束里

$$\max_y \{ \inf_x b^\top y + (c - A^\top y)^\top x \quad \text{s.t.} \quad x \geq 0 \} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max_y & b^\top y \\ \text{s.t.} & A^\top y \leq c \end{array}$$

例：线性规划问题的对偶

- 将 $\max b^\top y$ 改写为 $\min -b^\top y$, 对偶问题的拉格朗日函数为

$$L(y, x) = -b^\top y + x^\top (A^\top y - c) = -c^\top x + (Ax - b)^\top y$$

- 得到对偶函数

$$g(x) = \inf_y L(y, x) = \begin{cases} -c^\top x, & Ax = b \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 相应的对偶问题是

$$\begin{aligned} \max_x \quad & -c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- 该问题与原始问题完全等价, 表明线性规划问题与其对偶问题互为对偶

例: ℓ_1 正则化问题的对偶

■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \mu \|x\|_1$$

■ 令 $r = Ax - b$, 问题等价于

$$\begin{aligned} \min_{x, r} \quad & \frac{1}{2} \|r\|^2 + \mu \|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & r = Ax - b \end{aligned}$$

■ 拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(x, r, \lambda) &= \frac{1}{2} \|r\|^2 + \mu \|x\|_1 - \langle \lambda, Ax - b - r \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|r\|^2 + \lambda^\top r + \mu \|x\|_1 - (A^\top \lambda)^\top x + b^\top \lambda \end{aligned}$$

例: ℓ_1 正则化问题的对偶

■ 对偶函数

$$g(\lambda) = \inf_{x,r} L(x, r, \lambda) = \begin{cases} b^\top \lambda - \frac{1}{2} \|\lambda\|^2, & \|A^\top \lambda\|_\infty \leq \mu \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^\top \lambda - \frac{1}{2} \|\lambda\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \|A^\top \lambda\|_\infty \leq \mu \end{aligned}$$

例：半定规划问题的对偶问题

■ 考虑

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathcal{S}^n} \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

■ 拉格朗日函数

$$L(X, y, S) = \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^m y_i (\langle A_i, X \rangle - b_i) - \langle S, X \rangle, \quad S \succeq 0$$

例：半定规划对偶问题的对偶问题

■ 对偶函数

$$g(y, S) = \inf_X L(X, y, S) = \begin{cases} b^\top y, & \sum_{i=1}^m y_i A_i - C + S = 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & -b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m y_i A_i - C + S = 0 \\ & S \succeq 0 \end{aligned}$$

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

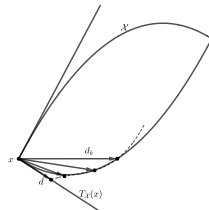
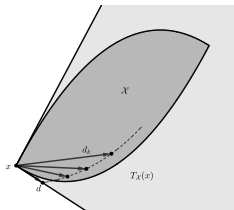
切锥

- 给定可行域 \mathcal{X} 及 $x \in \mathcal{X}$, 若存在序列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = x$ 以及正标量序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \rightarrow 0$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d$$

则称向量 d 为 \mathcal{X} 在点 x 处的一个**切向量**

- 所有点 x 处的切向量构成的集合称为**切锥**, 用 $T_{\mathcal{X}}(x)$ 表示



几何最优性条件

■ 一般优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned} \tag{4}$$

■ **定理** 假设可行点 x^* 是问题 (4) 的一个局部极小点. 如果 $f(x)$ 和 $c_i(x)$, $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}$ 在点 x^* 处是可微的, 那么

$$d^\top \nabla f(x^*) \geq 0, \quad \forall d \in T_{\mathcal{X}}(x^*)$$

等价于

$$T_{\mathcal{X}}(x^*) \cap \{d \mid \nabla f(x^*)^\top d < 0\} = \emptyset$$

线性化可行锥

- **定义** 对于可行点 $x \in \mathcal{X}$, 定义积极集 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x) = 0\}$, 点 x 处的线性化可行方向锥定义为

$$\mathcal{F}(x) = \left\{ d \mid \begin{array}{l} d^\top \nabla c_i(x) = 0, \forall i \in \mathcal{E} \\ d^\top \nabla c_i(x) \leq 0, \forall i \in \mathcal{A}(x) \cap \mathcal{I} \end{array} \right\}$$

- **命题** 设 $c_i(x), i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ 一阶连续可微, 则对任意可行点 x 有

$$T_{\mathcal{X}}(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$$

- 线性可行化方向锥容易计算, 但不能反映可行域 \mathcal{X} 的本质特征
- 切锥能反映可行域 \mathcal{X} 的本质特征, 但不容易计算
- 引入约束品性, 确保 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$, 从而用 $\mathcal{F}(x)$ 取代 $T_{\mathcal{X}}(x)$

■ **定理** 假设 x^* 是一般优化问题 (4) 的一个局部最优点

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

如果 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ 成立, 那么存在拉格朗日乘子 λ_i^* 使得

稳定性条件 $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0$

原始可行性条件 $c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E}$

原始可行性条件 $c_i(x^*) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}$

对偶可行性条件 $\lambda_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}$

互补松弛条件 $\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}$

- 若 x^* 是满足 KKT 条件的点, 假设 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$, 则 $\forall d \in \mathcal{F}(x^*)$ 有

$$d^\top \nabla f(x^*) = - \sum_{i \in \mathcal{E}} \underbrace{\lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*)}_{=0} - \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I}} \underbrace{\lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*)}_{\leq 0} \geq 0$$

- **定义** 设 (x^*, λ^*) 是满足 KKT 条件的 KKT 对, 定义**临界锥**为

$$\mathcal{C}(x^*, \lambda^*) = \{d \in \mathcal{F}(x^*) \mid d^\top \nabla c_i(x^*) = 0, \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ 且 } \lambda_i^* > 0\}$$

- 当 $d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$ 时, $\forall i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ 有 $\lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^\top d = 0$, 故

$$d^\top \nabla f(x^*) = \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*) = 0$$

二阶最优性条件

- **定理 (二阶必要条件)** 假设 x^* 是一个局部最优解, 且 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$. 令 λ^* 为相应的拉格朗日乘子, 即 (x^*, λ^*) 满足 KKT 条件, 那么

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$$

- **定理 (二阶充分条件)** 假设在可行点 x^* 处, 存在一个拉格朗日乘子 λ^* , 使得 (x^*, λ^*) 满足 KKT 条件. 如果

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*), \quad d \neq 0$$

那么 x^* 为一个严格局部极小解

- 回顾无约束优化问题的二阶最优性条件

■ 考虑

$$\min \quad x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 = 0$$

■ 拉格朗日函数为

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\left(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1\right)$$

■ 该问题可行域在任意一点 $x = (x_1, x_2)^\top$ 处的线性化可行方向锥为

$$\mathcal{F}(x) = \{(d_1, d_2) \mid \frac{x_1}{4}d_1 + x_2d_2 = 0\}$$

■ 根据 $\mathcal{C}(x, \lambda) = \mathcal{F}(x)$, 计算出 4 个 KKT 对

$$(x^\top, \lambda) = (2, 0, -4), (-2, 0, -4), (0, 1, -1), (0, -1, -1)$$

- 第一个 KKT 对 $y = (2, 0, -4)$, 计算可得

$$\nabla_{xx}^2 L(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(y) = \{(d_1, d_2) \mid d_1 = 0\}$$

取 $d = (0, 1)$, 则 $d^\top \nabla_{xx}^2 L(y) d = -6 < 0$, 因此 y 不是局部最优点

- 第三个 KKT 对 $z = (0, 1, -1)$, 计算可得

$$\nabla_{xx}^2 L(z) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(z) = \{(d_1, d_2) \mid d_2 = 0\}$$

对于任意的 $d = (d_1, 0)$ 且 $d_1 \neq 0$, 有 $d^\top \nabla_{xx}^2 L(z) d = \frac{3}{2} d_1^2 > 0$, 因此 z 是一个严格局部最优点

- 2.1 最优化问题解的存在性
- 2.2 无约束可微问题的最优性理论
- 2.3 无约束不可微问题的最优性理论
- 2.4 对偶理论
- 2.5 一般约束优化问题的最优性理论
- 2.6 带约束凸优化问题的最优性理论

■ 考虑带约束的凸优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{D}} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned} \tag{5}$$

- $f(x)$ 为适当的凸函数
- $c_i(x)$ 是凸函数且 $\text{dom } c_i = \mathbb{R}^n$
- 集合 \mathcal{D} 表示自变量 x 的定义域, 即 $\mathcal{D} = \{x \mid f(x) < +\infty\}$

Slater 约束品性与强对偶原理

- **定义** 集合 \mathcal{D} 的相对内点集定义为

$$\text{relint } \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \mid \exists r > 0, \text{ 使得 } B(x, r) \cap \text{affine } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}\}$$

- **定义** 若对凸优化问题 (5) 存在 $x \in \text{relint } \mathcal{D}$ 满足

$$c_i(x) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Ax = b$$

则称满足 **Slater 约束条件**

- **定理** 若凸优化问题满足 Slater 条件, 则强对偶原理成立

一阶充要条件

- **定理** 对于凸优化问题 (5), 如果 Slater 条件成立, 那么 x^*, λ^* 分别是原始、对偶全局最优解当且仅当

稳定性条件 $0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i^* \partial c_i(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* a_i$

原始可行性条件 $Ax^* = b, \forall i \in \mathcal{E}$

原始可行性条件 $c_i(x^*) \leq 0, \forall i \in \mathcal{I}$

对偶可行性条件 $\lambda_i^* \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}$

互补松弛条件 $\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \forall i \in \mathcal{I}$

例：仿射空间的投影问题

■ 考虑

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$$

■ 拉格朗日函数 $L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \lambda^\top (Ax - b)$

■ KKT 条件

$$\begin{cases} x^* - y + A^\top \lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases}$$

■ 第一式左右两边同时左乘 A 可得

$$Ax^* - Ay + AA^\top \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = (AA^\top)^{-1}(Ay - b)$$

■ 将 λ^* 代回第一式可知

$$x^* = y - A^\top (AA^\top)^{-1}(Ay - b)$$

■ 无约束优化问题及其最优性条件

问题	一阶条件	二阶条件
可微问题	$\nabla f(x^*) = 0$ (必要)	必要/充分
凸问题	$0 \in \partial f(x^*)$ (充要)	—
复合优化问题	$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$ (必要)	—
非凸非光滑	$0 \in \partial f(x^*)$ (必要)	—

■ 约束优化问题的最优性条件和相应约束品性

问题	一阶条件	二阶条件	约束品性
一般问题	KKT 条件 (必要)	必要/充分	LICQ
凸问题	KKT 条件 (充要)	—	Slater

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈