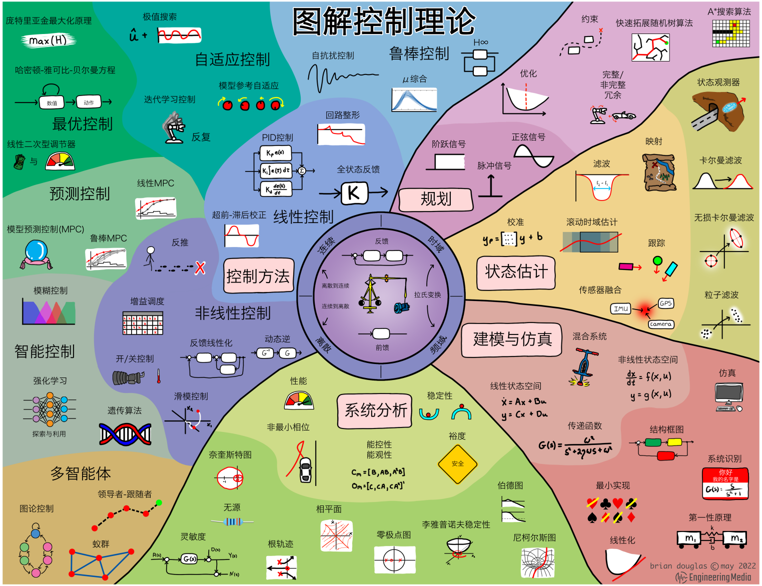
第一章 最优化简介

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

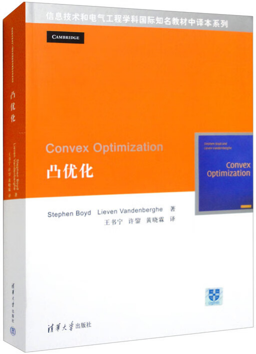
优化与控制

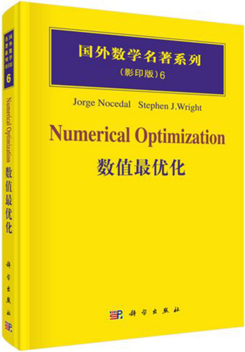


图解控制理论
庞特里亚金最大化原理
max(H)
极值搜索
自适应控制
哈密顿-雅可比-贝尔曼方程
数值
动作
最优控制
迭代学习控制
模型参考自适应
反复
线性二次型调节器
与
自抗扰控制
鲁棒控制
H∞
μ综合
回路整形
PID控制
全状态反馈
K
预测控制
线性MPC
模型预测控制(MPC)
鲁棒MPC
超前-滞后校正
线性控制
反推
控制方法
模糊控制
增益调度
非线性控制
智能控制
反馈线性化
动态逆
开/关控制
强化学习
探索与利用
遗传算法
滑模控制
多智能体
领导者-跟随者
图论控制
蚁群
约束
快速拓展随机树算法
A*搜索算法
优化
完整/
非完整
冗余
规划
阶跃信号
正弦信号
脉冲信号
状态观测器
映射
滤波
卡尔曼滤波
校准
滚动时域估计
无损卡尔曼滤波
跟踪
状态估计
传感器融合
IMU
GPS
camera
粒子滤波
反馈
前馈
连续
时域
离散
频域
离散到连续
连续到离散
拉氏变换
建模与仿真
混合系统
非线性状态空间
仿真
线性状态空间
传递函数
结构框图
系统识别
你好
我的名字是
最小实现
第一性原理
线性化
性能
稳定性
系统分析
非最小相位
裕度
安全
能控性
能观性
奈奎斯特图
伯德图
无源
相平面
灵敏度
根轨迹
零极点图
李雅普诺夫稳定性
尼柯尔斯图
brian douglas © may 2022
EngineeringMedia

参考资料

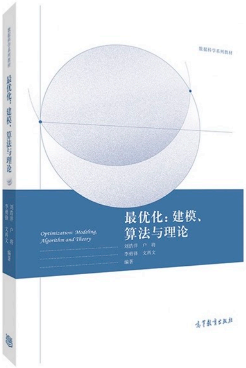
- Convex Optimization, Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe
- Numerical Optimization, Jorge Nocedal and Stephen Wright, Springer

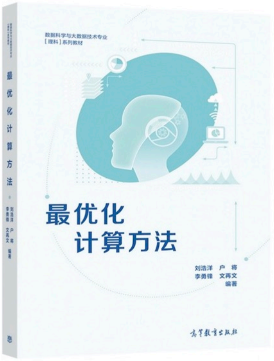




教材

- 最优化计算方法，刘浩洋，户将，李勇锋，文再文著，高等教育出版社，2021
- http://faculty.bicmr.pku.edu.cn/~wenzw/optbook.html





章节安排

- 第一章　最优化简介
- 第二章　基础知识
- 第三章　典型优化问题
- 第四章　最优性理论
- 第五章　无约束优化算法
- 第六章　约束优化算法
- 第七章　复合优化算法
- 更多案例分析

目录

最优化问题的一般形式

- 最优化问题一般可以描述为

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{1}$$

  - $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ 是决策变量
  - $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是目标函数
  - $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是约束集合或可行域，可行域包含的点称为可行解或可行点
  - 当 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ 时，问题 (1) 称为无约束优化问题
  - 集合 $\mathcal{X}$ 通常可以由约束函数 $c_i(x):\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, m+l$ 表达为

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid\ & c_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\ & c_i(x) = 0, \quad i = m+1, m+2, \cdots, m+l\} \end{aligned}$$

最优化问题的一般形式

- 在所有满足约束条件的决策变量中，使目标函数取最小值的变量 x^* 称为优化问题 (1) 的**最优解**，即对任意 $x \in \mathcal{X}$ 都有

$$f(x) \geq f(x^*)$$

  - 如果求解目标函数 f 的最大值，则 "min" 应替换为 "max"
  - 函数 f 的最小（最大）值不一定存在，但其下（上）确界总是存在的
  - x 可以是矩阵、多维数组或张量等

最优化问题的类型

- 线性规划　目标函数和约束函数均为线性函数的问题
- 整数规划　变量只能取整数的问题
- 非线性规划　目标函数和约束函数中至少有一个为非线性函数的问题
- 二次规划　目标函数是二次函数而约束函数是线性函数的问题
- 半定规划　极小化关于半正定矩阵的线性函数的问题
- 稀疏优化　最优解只有少量非零元素的问题
- 非光滑优化　包含非光滑函数的问题
- 低秩矩阵优化　最优解是低秩矩阵的问题
- 鲁棒优化、组合优化、随机优化、零阶优化、流形优化、分布式优化等

目录

稀疏优化

- 给定 $b \in \mathbb{R}^m$，矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且向量 b 的维数远小于向量 x 的维数，即 $m \ll n$. 考虑线性方程组求解问题

$$Ax = b$$

  - 方程组欠定，存在无穷多个解
  - 原始信号中有较多的零元素，即稀疏解

$$(\ell_0)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \|x\|_0\\ \text{s.t.} & Ax=b\end{cases}\qquad(\ell_2)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \|x\|_2\\ \text{s.t.} & Ax=b\end{cases}\qquad(\ell_1)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \|x\|_1\\ \text{s.t.} & Ax=b\end{cases}$$

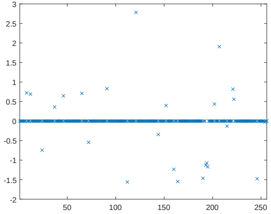
- 压缩感知（compressive sensing），即通过部分信息恢复全部信息的解决方案

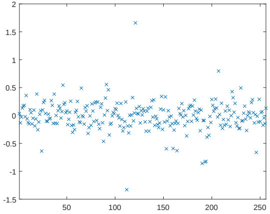
稀疏优化

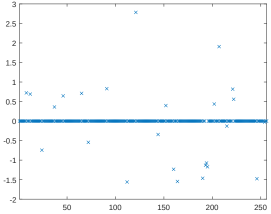
- MATLAB 仿真

```
m = 128; n = 256;
A = randn(m, n); u = sprandn(n, 1, 0.1);
b = A * u;
```

- 若 A, b 满足一定的条件，向量 u 也是 ℓ_1 范数优化问题的**唯一最优解**







稀疏优化代表作

Compressed sensing

DL Donoho - IEEE Transactions on information theory, 2006 - ieeexplore.ieee.org

Suppose x is an unknown vector in Ropf m (a digital image or signal); we p
measure n general linear functionals of x and then reconstruct. If x is know
compressible by …

☆ 被引用次数：34750 相关文章 ≫

Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information

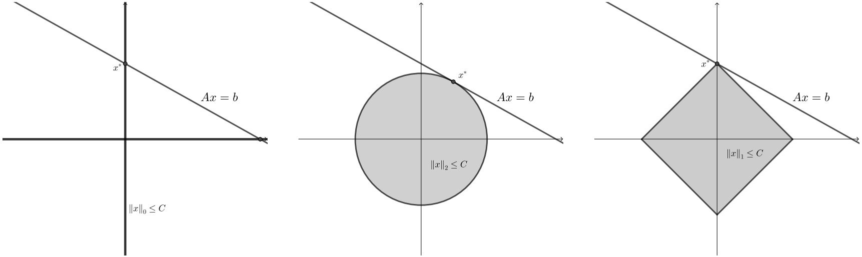
EJ Candès, J Romberg, T Tao - IEEE Transactions on …, 2006 - ieeexplor

… to Uncertainty Principles From a certain point of view, our results are co
the so-called uncertainty principles [4]… will be a novel uncertainty principl
for generic sets , . …

☆ 99 引用 被引用次数：19715 相关文章 所有 27 个版本 ≪

稀疏优化

- 原点到仿射集 $Ax = b$ 的投影



- 绝对值函数在零点处不可微，即**非光滑**
- A 通常是稠密矩阵，甚至元素未知或者不能直接存储

LASSO 问题

- 考虑带 ℓ_1 范数正则项的优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \mu\|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad Ax = b \tag{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \mu\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 \tag{3}$$

  - $\mu > 0$ 是给定的正则化参数
  - 称为 LASSO（least absolute shrinkage and selection operator）
- 本课程大部分算法都将针对(2)和(3)给出

LASSO 代表作

Regression shrinkage and selection via the lasso

R Tibshirani - Journal of the Royal Statistical Society Series B …, 1996 - academic.oup.com

… methods for estimation ofprediction error and the lasso shrinkage par
Bayes model for the lasso is briefly mentioned in Section 5. We describe
algorithm in Section 6. …

☆ 被引用次数：60458 相关文章 »

The adaptive lasso and its oracle properties

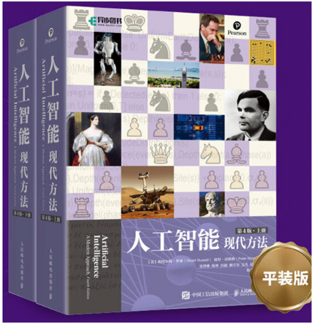
H Zou - Journal of the American statistical association, 2006 - Taylor & Francis

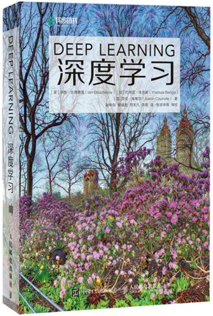
… for the lasso variable selection to … lasso, called the adaptive lasso,
adaptive weights are used for penalizing different coefficients in the l1 p
show that the adaptive lasso …

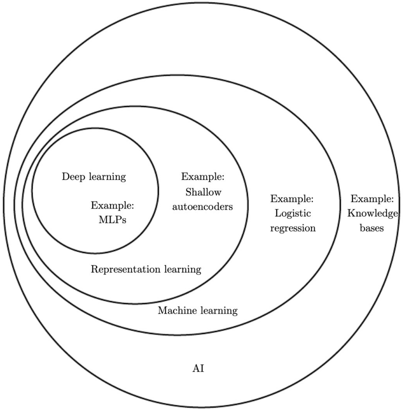
☆ 被引用次数：8879 相关文章 »

目录

- 深度学习（deep learning）是机器学习的一个子领域
- 起源可以追溯至 20 世纪 40 年代，雏形出现在控制论







常见的激活函数类型

- Sigmoid 函数

$$t(z) = \frac{1}{1+\exp(-z)}$$

- Heaviside 函数

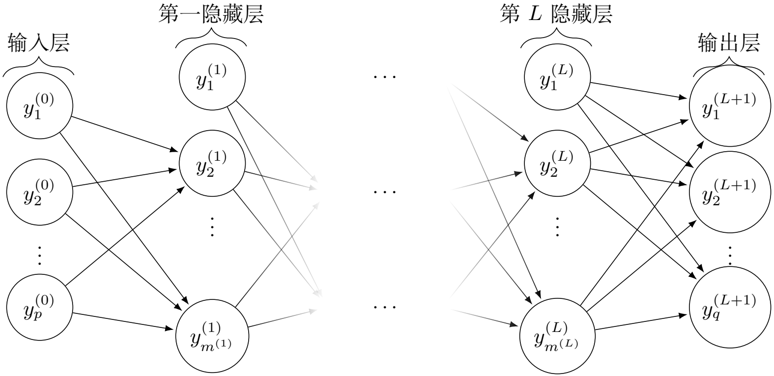
$$t(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

- ReLU 函数

$$t(z) = \max\{0, z\}$$

多层感知机

- 多层感知机（multi-layer perceptron, MLP）也叫前馈神经网络
- 通过已有的知识来对未知事物进行预测



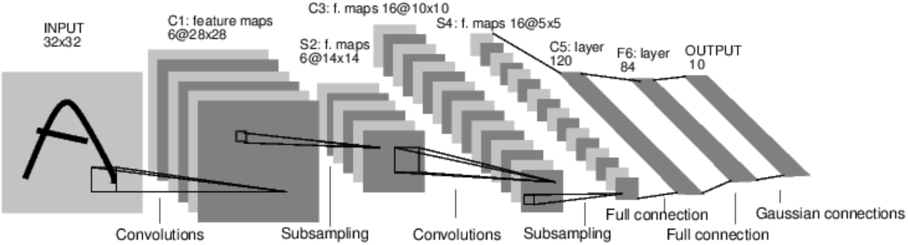
- 卷积神经网络（convolutional neural network, CNN）
- 给定二维图像 $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和卷积核 $K \in \mathbb{R}^{k\times k}$，定义卷积操作 $S = I * K$，即

$$S_{i,j} = \langle I(i:i+k-1, j:j+k-1), K\rangle$$

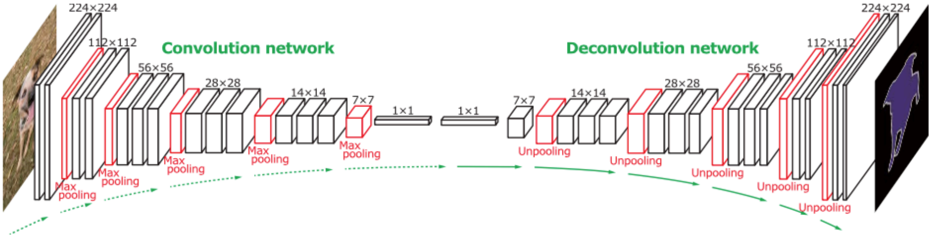
$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 1_{\times 1} & 2_{\times 0} & 1_{\times 1} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1_{\times 0} & 2_{\times 1} & 0_{\times 0} & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2_{\times 1} & 0_{\times 0} & 1_{\times 1} & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}}_{\mathbf{I}} * \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}}_{\mathbf{K}} = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6 & 5 & 6 & \boxed{7} & 4 \\ \hline 3 & 3 & 6 & 1 & 5 \\ \hline 7 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ \hline 5 & 5 & 4 & 1 & 7 \\ \hline 7 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}}_{\mathbf{S} = \mathbf{I} * \mathbf{K}}$$

卷积神经网络

- LeCun 等人开创性的建立了数字分类的神经网络 LeNet-5，成功在银行识别支票上的手写数字

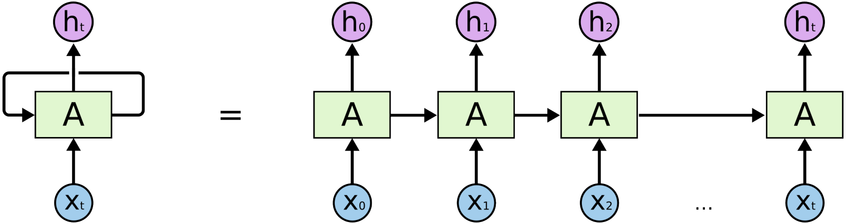


- 生成网络是一种特殊的卷积网络，它使用转置卷积，也称为反卷积，常用的有生成对抗网络、 变分自编码器、扩散模型



递归神经网络

- 递归神经网络（recurrent neural networks, RNN）建立在与前馈神经网络相同的计算单元上，但不必分层组织，并且允许定向循环



深度学习中的优化算法

典型的数学模型

$$\min_{x \in \mathcal{W}} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ell(f(a_i, x), b_i) + \mu\varphi(x)$$

随机梯度类算法

- pytorch/caffe2: adadelta, adagrad, adam, nesterov, rmsprop, YellowFin
  https://github.com/pytorch/pytorch/tree/master/caffe2/sgd
- pytorch/torch: sgd, asgd, adagrad, rmsprop, adadelta, adam, adamax
  https://github.com/pytorch/pytorch/tree/master/torch/optim
- tensorflow: Adadelta, AdagradDA, Adagrad, ProximalAdagrad, Ftrl, Momentum, adam, Momentum, CenteredRMSProp
  https://github.com/tensorflow/tensorflow/blob/master/tensorflow/core/kernels/training_ops.cc

神经网络代表作

Imagenet classification with deep convolutional neural networks

A Krizhevsky, I Sutskever… - Advances in neural …, 2012 - proceedings.

We trained a large, deep convolutional neural network to classify the 1.3
resolution images in the LSVRC-2010 ImageNet training set into the 100
classes. On the …

☆ ワワ 引用 被引用次数：132672 相关文章 所有 98 个版本 HTML

Deep residual learning for image recognition

K He, X Zhang, S Ren, J Sun - Proceedings of the IEEE …, 2016 - openaccess.thecvf.com

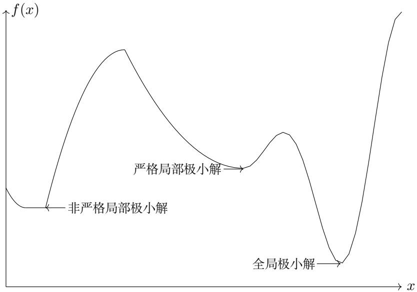
… Deeper neural networks are more difficult to train. We present a res
framework to ease the training of networks that are substantially deepe
used previously. …

☆ ワワ 引用 被引用次数：232781 相关文章 所有 65 个版本 HTM

目录

全局和局部最优解

- 如果 $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$，则称 $\bar{x}$ 为全局极小解
- 如果存在 $N_\varepsilon(\bar{x})$ 使得 $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in N_\varepsilon(\bar{x}) \cap \mathcal{X}$, 则称 $\bar{x}$ 为局部极小解
- 进一步，如果有 $f(\bar{x}) < f(x), \forall x \in N_\varepsilon(\bar{x}) \cap \mathcal{X}$ 且 $x \neq \bar{x}$ 成立，则称 $\bar{x}$ 为严格局部极小解



收敛性

- 给定初始点 x^0，记算法迭代产生的点列为 $\{x^k\}$
  - 如果 $\{x^k\}$ 在某种范数 $\|\cdot\|$ 的意义下满足

    $$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\| = 0$$

    且收敛的点 x^* 为一个局部（全局）极小解，则称该算法依点列收敛到局部（全局）极小解
  - 如果从任意初始点 x^0 出发，算法都是依点列收敛到局部（全局）极小解的，则称该算法全局依点列收敛到局部（全局）极小解
  - 记对应的函数值序列 $\{f(x^k)\}$，则称该算法（全局）依函数值收敛到局部（全局）极小值

收敛准则

- 对于无约束优化问题，常用的收敛准则有

$$\frac{f(x^k) - f^*}{\max\{|f^*|, 1\}} \le \varepsilon_1, \quad \|\nabla f(x^k)\| \le \varepsilon_2$$

  如果最优解未知，通常使用相对误差

$$\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\max\{\|x^k\|, 1\}} \le \varepsilon_3, \quad \frac{|f(x^{k+1}) - f(x^k)|}{\max\{|f(x^k)|, 1\}} \le \varepsilon_4$$

- 对于约束优化问题，还需要考虑约束违反度

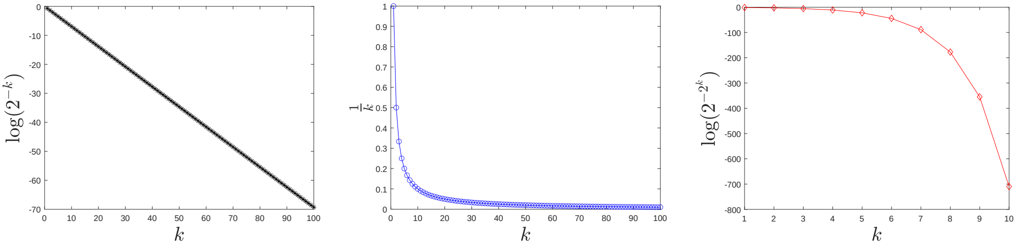
$$c_i(x^k) \le \varepsilon_5, \ i = 1, 2, \cdots, m$$
$$|c_i(x^k)| \le \varepsilon_6, \ i = m+1, m+2, \cdots, m+l$$

渐进收敛速度

- 设$\{x^k\}$ 为算法产生的迭代点列且收敛于 x^*
  - Q-线性收敛
$$\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|}\le a,\quad a\in(0,1)$$
  - Q-次线性收敛
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|}=1$$
  - Q-超线性收敛
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|}=0$$
  - Q-二次收敛
$$\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|^2}\le a,\quad a>0$$

渐进收敛速度

- 点列 $\{2^{-k}\}$ 是 Q-线性收敛的
- 点列 $\{1/k\}$ 是 Q-次线性收敛的
- 点列 $\{2^{-2^k}\}$ 是 Q-二次收敛的，也是 Q-超线性收敛的



一般来说，选择 Q-超线性收敛和 Q-二次收敛的算法

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈