第五章 动态规划

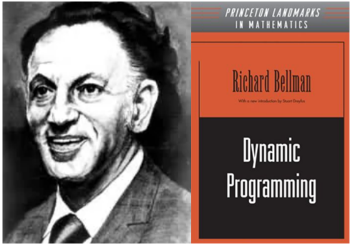
修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

动态规划

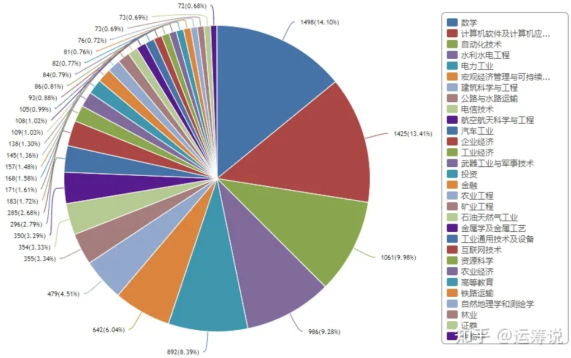
- 动态规划是解决多阶段决策过程最优化问题的一种方法，由美国数学家贝尔曼 (R. Bellman)等人在 20 世纪 50 年代初提出



- 1976 年，获得美国运筹与管理学会最高奖——冯·诺伊曼理论奖
- 1977 年，当选为美国艺术与科学研究院院士和美国工程科学院院士
- 1979 年，授予 IEEE 协会最高奖项——荣誉勋章奖

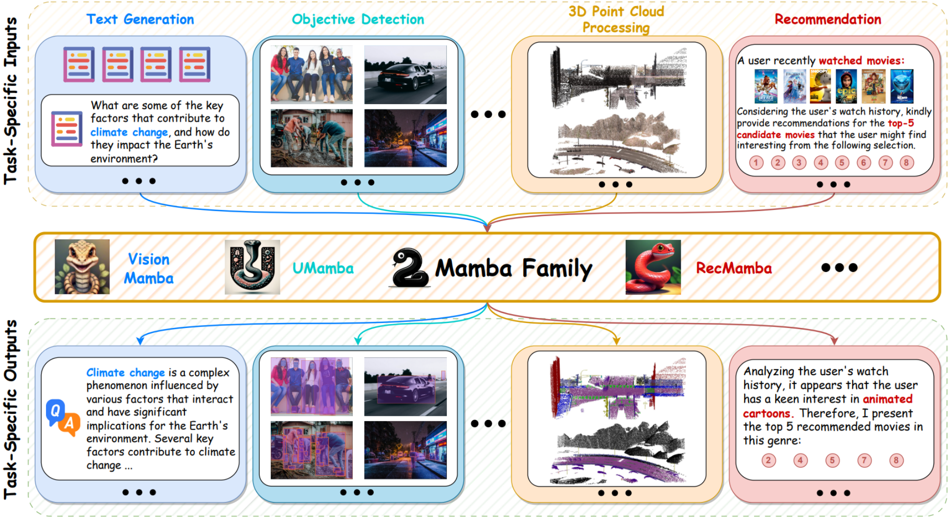
动态规划

- 动态规划是现代企业管理中的一种重要决策方法，可用于解决最优路径问题、资源分配问题、生产计划与库存、排序等问题及生产过程的最优控制等



- 线性规划所研究的问题与时间无关，为静态规划

动态规划


Task-Specific Inputs
Text Generation
What are some of the key factors that contribute to climate change, and how do they impact the Earth's environment?
Objective Detection
3D Point Cloud Processing
Recommendation
A user recently watched movies:
Considering the user's watch history, kindly provide recommendations for the top-5 candidate movies that the user might find interesting from the following selection.
1 2 3 4 5 6 7 8
Vision Mamba
UMamba
Mamba Family
RecMamba
Task-Specific Outputs
Climate change is a complex phenomenon influenced by various factors that interact and have significant implications for the Earth's environment. Several key factors contribute to climate change ...
Q
A
Analyzing the user's watch history, it appears that the user has a keen interest in animated cartoons. Therefore, I present the top 5 recommended movies in this genre:
2 4 5 7 8

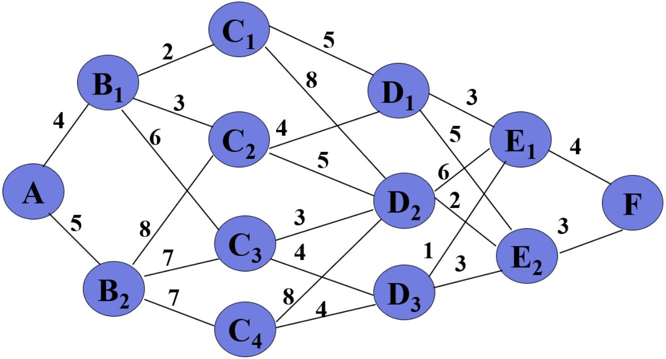
多阶段决策问题

- 多阶段决策问题是指一类特殊的活动过程，它们按时间分为若干相互联系的阶段，称为“时段”，在每个阶段都要做出决策，全部过程就是一个决策序列
- 每一阶段的决策都不是完全独立的，每个单阶段的决策不仅影响该阶段的效果，还要影响到下阶段的初始状态

- 多阶段决策问题就是求一个决策序列 (策略)，使各阶段的效益总和达到最优

例 1 (最短路问题)

- 给定一个线路网络图，两点之间连线上的数字表示两点之间的距离



- 试求一条从 A 到 F 铺设的输油管道路线，使总距离最短

例 2 (投资决策问题)

- 某公司有资金 10 万元, 若投于项目 i $(i=1,2,3)$ 的投资额为 x_i 时，其收益分别为 $g_1(x_1)=4x_1$，$g_2(x_2)=9x_2$，$g_3(x_3)=2x_3^2$，问应如何分配投资数额才能使总收益最大
- 静态模型

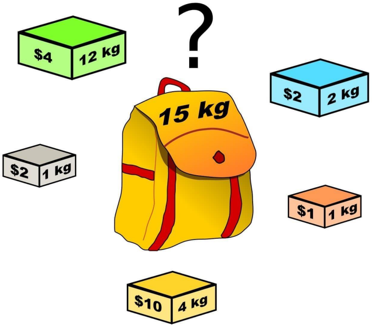
$$\max\ z = 4x_1 + 9x_2 + 2x_3^2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 人为赋予“时段”的概念，转化成一个三阶段的决策问题

例 3 (背包问题)

- 一位旅行者携带背包去登山，已知他所能承受的背包重量限度为 $a$kg，现有 n 种可供他选择背入背包，第 i 种物品的单件重量为 $a_i$kg，其价值是携带数量 x_i 的函数 $c_i(x_i)$ $(i = 1, 2, , n)$



- 问旅行者应如何选择携带各种物品的件数，使总价值最大

小结

- 动态规划
- 动态规划与线性规划
- 多阶段决策问题
- 多阶段决策问题例子
  - 最短路问题
  - 投资决策问题
  - 背包问题
  - 设备更新问题

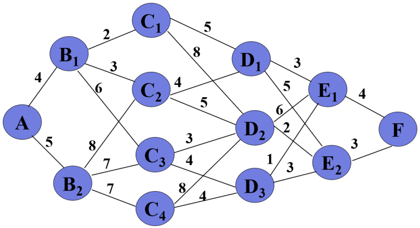
目录

动态规划的基本概念

- 阶段
- 状态
- 决策
- 策略
- 状态转移方程
- 指标函数
- 基本方程
- 边界条件

阶段

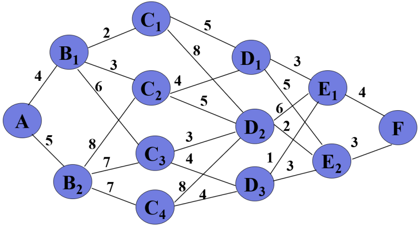
- 记 k 为阶段变量



  - $k=1,\ A\to B\ (B_1,B_2)$
  - $k=2,\ B\to C\ (C_1,C_2,C_3,C_4)$
  - $k=3,\ C\to D\ (D_1,D_2,D_3)$
  - $k=4,\ D\to E\ (E_1,E_2)$
  - $k=5,\ E\to F$

状态

- 记 s_k 为第 k 阶段的状态变量，S_k 为状态变量 s_k 的取值集合

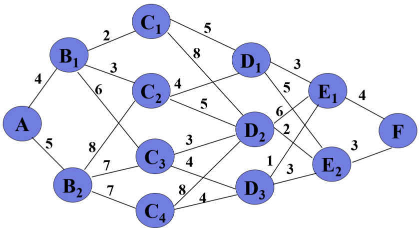


  - 第一阶段状态为 A，状态变量 s_1 的集合为 $S_1 = \{A\}$
  - $S_2 = \{B_1, B_2\}$，$S_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$，$S_4 = \{D_1, D_2, D_3\}$，$S_5 = \{E_1, E_2\}$

- 当某阶段状态给定，以后发展不受这段以前各段状态的影响，称为无后效性

决策

- 记 $u_k(s_k)$ 为第 k 阶段当状态为 s_k 时的决策变量，$D_k(s_k)$ 为第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合

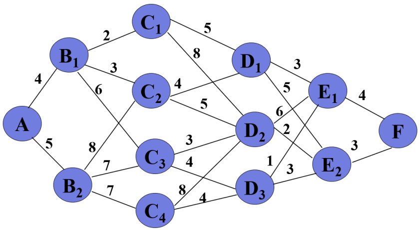


  - 从第二阶段的状态 B_1 出发，可选择下一阶段的 C_1, C_2, C_3，即其允许决策集合为 $D_2(B_1) = \{C_1, C_2, C_3\}$
  - 如果决定选择 C_3，则 $u_2(B_1) = C_3$

策略

- 所有各阶段组成的决策函数序列称为策略

$$p_{1,n}\{u_1(s_1), u_2(s_2), \ldots, u_n(s_n)\} \in P_{1,n}$$



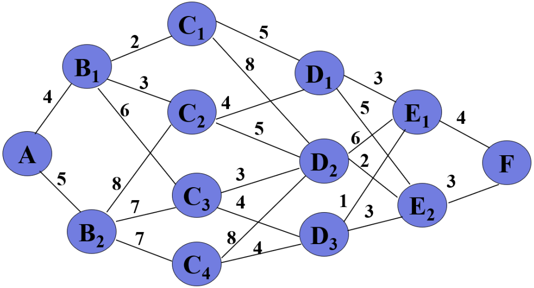
- 供选择的策略有一定的范围称为允许策略集合
- 使整个问题达到最优效果的策略称为最优策略

状态转移方程

- 状态转移方程表示本阶段状态与上一阶段状态和上一阶段决策的关系

$$s_{k+1} = T(s_k, u_k)$$

  - 从 k 阶段到 $k+1$ 阶段的状态转移方程为 $s_{k+1} = u_k(s_k)$



指标函数

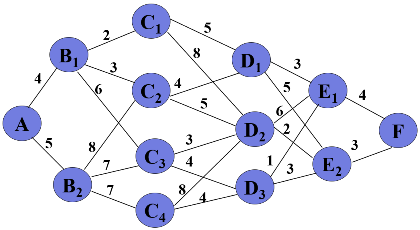
- **指标函数**用于衡量所选定策略的优劣，分为阶段指标函数和过程指标函数
- **阶段指标函数**
  - 第 k 阶段，从状态 s_k 出发，采取决策 u_k 时的效益，记 $d(s_k, u_k)$
- **过程指标函数**
  - 一个 n 段决策过程，从 1 到 n 叫问题的原过程。如 $V_{1,n}(s_1, p_{1,n})$ 表示初始状态为 s_1 采取策略 $p_{1,n}$ 时原过程的指标函数值
  - 对于任意一个给定的 k，从第 k 阶段到第 n 阶段的过程称为原过程的一个后部子过程。如 $V_{k,n}(s_k, p_{k,n})$ 表示在第 k 阶段状态为 s_k 采取策略 $p_{k,n}$ 时，后部子过程的指标函数值

最优指标函数

- 最优指标函数即指标函数的最优值
  - $f_k(s_k)$ 表示从第 k 阶段状态 s_k 出发，采用最优策略 $p_{k,n}$ 到过程终止时的最佳效益值
  - $f_1(s_1)$ 表示从第 1 阶段状态 s_1 出发，采用最优策略 $p_{1,n}$ 到过程终止时的最佳效益值
- 最优指标函数 $f_k(s_k)$ 与 $V_{k,n}(s_k, p_{k,n})$ 的关系

$$
\begin{aligned}
f_k(s_k) &= V_{k,n}(s_k, p^*_{k,n}) \\
&= \mathrm{opt}_{p_{k,n} \in P_{k,n}} V_{k,n}(s_k, p_{k,n})
\end{aligned}
$$

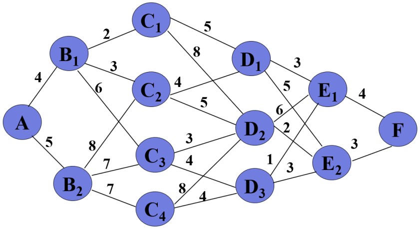
- 例如指标函数是距离，第 2 阶段，状态为 B_1 时 $d(B_1, C_2)$ 表示由 B_1 出发，采用决策到下一段 C_2 点间的距离



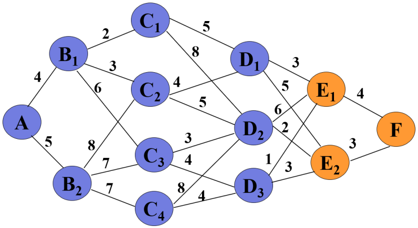
  - $V_{2,5}(B_1)$ 表示从 B_1 到 F 的距离
  - $f_2(B_1)$ 表示从 B_1 到 F 的最短距离
  - 总目标是求 $f_1(A)$，即从 A 到终点 F 的最短距离

- 从过程的最后一段开始，用逆序递推方法求解，逐步求出各段各点到终点 F 的最短路线，最后求得 A 点到 F 点的最短路线
- 当 $k=5$ 时: 状态变量 s_5 可取两种状态 E_1, E_2, 到 F 点的路长分别为

$$f_5(E_1)=4,\ f_5(E_2)=3$$



- 当 $k=4$ 时: 状态变量 s_4 可取三种状态 D_1, D_2, D_3，这是经过一个中途点到达终点 F 的两级决策问题



  - 从 D_1 到 F，比较

$$
\begin{aligned}
f_4(D_1) &= \min\{d(D_1,E_1)+f_5(E_1), d(D_1,E_2)+f_5(E_2)\} \\
&= \min\{3+4, 5+3\} = 7
\end{aligned}
$$

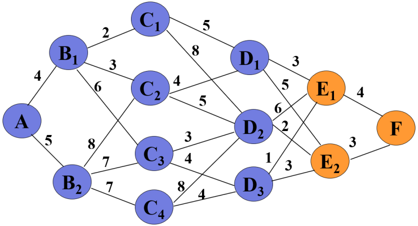
  - 路径为 $D_1 \to E_1 \to F$，决策为方程 $u_4^*(D_1) = E_1$

动态规划的基本思想

- 从 D_2 到 F，比较

$$\begin{aligned} f_4(D_2) &= \min\{d(D_2, E_1) + f_5(E_1), d(D_2, E_2) + f_5(E_2)\} \\ &= \min\{6 + 4, 2 + 3\} = 5 \end{aligned}$$

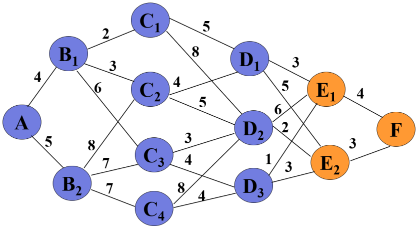
- 路径为 $D_2 \to E_2 \to F$，决策为方程 $u_4^*(D_2) = E_2$



- 从 D_3 到 F，比较

$$
\begin{aligned}
f_4(D_3) &= \min\{d(D_3, E_1) + f_5(E_1), d(D_3, E_2) + f_5(E_2)\} \\
&= \min\{2+4, 3+3\} = 5
\end{aligned}
$$

- 路径为 $D_3 \to E_1 \to F$，决策为方程 $u_4^*(D_3) = E_1$



动态规划的基本思想

- 当 $k=3$ 时: 有
  - $f_3(C_1)=12$, $u_3^*(C_1)=D_1$
  - $f_3(C_2)=10$, $u_3^*(C_2)=D_2$
  - $f_3(C_3)=8$, $u_3^*(C_3)=D_2$
  - $f_3(C_4)=9$, $u_3^*(C_4)=D_3$
- 当 $k=2$ 时: 有
  - $f_2(B_1)=13$, $u_2^*(B_1)=C_2$
  - $f_2(B_2)=15$, $u_2^*(B_2)=C_3$
- 当 $k=1$ 时: 只有一个状态点 A, 于是

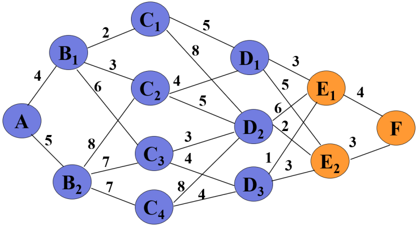
$$\begin{aligned} f_1(A) &= \min\{d(A,B_1)+f_2(B_1), d(A,B_2)+f_2(B_2)\} \\ &= \min\{4+13, 5+15\} = 17 \end{aligned}$$

动态规划的基本思想

- 按计算顺序反推可得最优决策序列 $\{u_k\}$，即

$$
\begin{aligned}
&u_1^*(A) = B_1,\ u_2^*(B_1) = C_2,\ u_3^*(C_2) = D_2 \\
&u_4^*(D_2) = E_2,\ u_5^*(E_2) = F
\end{aligned}
$$

最优路线为 $A \to B_1 \to C_2 \to D_2 \to E_2 \to F$



动态规划的基本思想

- 在求解的各个阶段，都利用了第 k 段和第 $k+1$ 段的关系

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\{d_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 5, 4, 3, 2, 1 \\ f_6(s_6) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \text{opt}_{u_k \in D_k(s_k)} \{v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = n, n-1, \ldots, 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

- 上式称为动态规划的基本方程
- $f_6(s_6) = 0$ 和 $f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$ 称为边界条件

动态规划的一些思考

- 动态规划方法的优点
  - 较穷举法更容易计算
  - 不仅得到了 A 到 F 的最短路线，而且得到了中间任一点到 F 的最短路线
- 动态规划方法的步骤
  - 将多阶段决策过程划分阶段，恰当的选取状态变量、决策变量及定义最优指标函数，从而将问题化为一族同类型的子问题，然后逐个求解
  - 求解时从边界条件开始，逆（或顺）过程行进方向，逐段递推寻优。在每一个子问题求解时，都要使用它前面已求出的子问题的最优结果，最后一个子问题的最优解就是整个问题的最优解

小结

- 基本概念
  - 阶段 k
  - 状态 s_k
  - 决策 u_k
  - 策略 $p_{1,n}$
  - 状态转移方程 $s_{k+1} = T_k(s_k, u_k)$
  - 指标函数 $f_k(s_k)$
- 逆序递推法
- 标号法
- 课后作业: P217, 习题 7.1 (逆序法)

目录

例 1

- 某公司有资金 10 万元, 若投资项目 i $(i=1,2,3)$ 的投资额为 x_i $(i=1,2,3)$ 时，其收益分别为

$$g_1(x_1)=4x_1,\ g_2(x_2)=9x_2,\ g_3(x_3)=2x_3^2$$

  问应如何分配投资才能使总收益最大?

- 划分阶段: 引入时段的概念，即将投资项目排序。首先考虑对项目 1 投资，然后对项目 2 和项目 3 投资
- 选择状态变量: 通常选择随递推过程累计的量或者按某种规律变化的量作为状态变量，即把每阶段可供使用的资金定为状态变量 s_k，初始状态 $s_1=10$
- 确定决策变量: 通常把决策变量 u_k 设为静态问题中的变量 x_k，即 $u_k=x_k$

动态规划建模举例

- 写出状态转移方程: 记 u_1 为可分配用于第一种项目的最大资金，则当第 1 阶段 $(k=1)$ 时，有

$$\begin{cases} s_1 = 10 \\ u_1 = x_1 \end{cases}$$

当第 2 阶段 $(k=2)$ 时，状态变量 s_2 为可投资余下项目的资金，即

$$\begin{cases} s_2 = s_1 - u_1 \\ u_2 = x_2 \end{cases}$$

- 一般地，当第 k 阶段时

$$\begin{cases} s_k = s_{k-1} - u_{k-1} \\ u_k = x_k \end{cases}$$

动态规划建模举例

- **阶段**: $k = 1, 2, 3$
- **状态变量**: s_k 表示第 k 段可以投资于第 k 项到第 3 个项目的资金
- **决策变量**: x_k 表示决定给第 k 个项目投资的资金
- **状态转移方程**: $s_{k+1} = s_k - x_k$
- **指标函数**: $V_{k,3} = \sum\limits_{i=k}^{3} g_i(x_i)$
- **最优指标函数**: $f_k(s_k)$ 表示当可投资金为 s_k 时，投资第 k 个至第 3 个项目所得的最大收益
- **基本方程**:
$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, & k = 3, 2, 1 \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

动态规划建模步骤

- 第一步：划分阶段 k
  - 分析题意，识别问题的多阶段特性，按时间或空间的先后顺序划分为满足递推关系的若干阶段，对非时序的静态问题人为地赋予“时段”概念
- 第二步：正确选择状态变量 s_k
  - 状态变量首先应描述研究过程的演变特征，其次应包含到达这个状态前的足够信息并具有无后效性
  - 状态变量应具有可知性，即状态变量的值可通过直接或间接的方法测知
  - 状态变量可以是离散的，也可以是连续的
  - 建模时，一般从与决策有关的条件中或者从约束条件中去寻找状态变量，选择随递推过程累计的量或者按某种规律变化的量作为状态变量

动态规划建模步骤

- 第三步：写出状态转移方程
  - 决策变量 u_k 是对过程进行控制的手段，复杂问题中决策变量可以是多维的向量，它的取值可能离散，也可能连续
  - 每阶段的允许决策集合相当于线性规划问题中的约束条件
  - 写出状态转移方程 $s_{k+1} = T(s_k, u_k)$
- 第四步：确定基本方程
  - 指标函数 $V_{k,n}$
  - 最优指标函数 $f_k(s_k)$
  - 阶段指标 $d(s_k, u_k)$
  - 列出最优指标函数的递推关系及边界条件（即基本方程）

逆序解法

- 寻优的方向与多阶段决策过程的实际行进方向相反，从最后一段开始计算逐段前推，求得全过程的最优策略，称为逆序解法
- 设已知初始状态为 s_1，并假定最优指标函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段的初始状态为 s_k 从 k 阶段到 n 阶段所得到的最大效益
- 从第 n 阶段开始，有

$$f_n(s_n) = \max_{u_n \in D_n(s_n)} d_n(s_n, u_n)$$

其中 $D_n(s_n)$ 表示状态 s_n 所确定的第 n 阶段的允许决策集合。通过计算得到最优解 $u_n = u_n(s_n)$ 和最优值 $f_n(s_n)$

逆序解法

- 在第 $n-1$ 阶段，有

$$f_{n-1}(s_{n-1}) = \max_{u_{n-1}\in D_{n-1}(s_{n-1})} \{d_{n-1}(s_{n-1}, u_{n-1}) * f_n(s_n)\}$$

其中 $s_n = T_{n-1}(s_{n-1}, u_{n-1})$，$*$ 表示 $+$ 和 $\times$。通过计算得到最优解 $u_{n-1} = u_{n-1}(s_{n-1})$ 和最优值 $f_{n-1}(s_{n-1})$

- 在第 k 阶段，有

$$f_k(s_k) = \max_{u_k\in D_k(s_k)} \{d_k(s_k, u_k) * f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

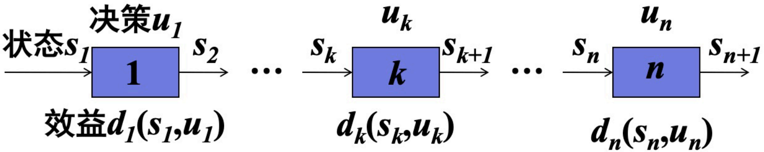
其中 $s_{k+1} = T_k(s_k, u_k)$。通过计算得到最优解 $u_k = u_k(s_k)$ 和最优值 $f_k(s_k)$

- 如此类推，直到第 1 阶段，有

$$f_1(s_1) = \max_{u_1 \in D_1(s_1)} \{d_1(s_1, u_1) * f_2(s_2)\}$$

其中 $s_2 = T_1(s_1, u_1)$。通过计算得到最优解 $u_1 = u_1(s_1)$ 和最优值 $f_1(s_1)$

- 由于 s_1 已知，则 $u_1 = u_1(s_1)$ 和 $f_1(s_1)$ 确定，从而 $s_2 = T_1(s_1, u_1)$ 也可确定
- 依此类推就可逐步确定出每个阶段的决策及效益



例 2

- 用逆序解法求解问题

$$\max\ z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c\ (c > 0) \\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

- 动态规划建模
  - 第一步：划分阶段
  - 第二步：正确选择状态变量
  - 第三步：写出状态转移方程
  - 第四步：确定基本方程

例 2

- 状态变量: s_1, s_2, s_3, s_4，并记 $s_1 = c$
- 决策变量: x_1, x_2, x_3，各阶段指标函数按乘积方式结合
- 状态转移方程: $s_{k+1} = s_k - x_k$
- 阶段指标函数: $d_k(s_k, u_k) = x_1, x_2^2, x_3$
- 过程指标函数: $V_{1,3} = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$
- 最优指标函数: $f_k(s_k)$
- 基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{g_k(x_k) \cdot f_{k+1}(s_{k+1})\}, \ k = 3, 2, 1 \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

例 2

- 分析: 设 $s_3 = x_3$, $s_3 + x_2 = s_2$, $s_2 + x_1 = s_1 = c$, 于是有

$$s_3 = x_3, 0 \leq x_2 \leq s_2, 0 \leq x_1 \leq s_1 = c$$

采用逆序解法，从后向前依次有

$$f_3(s_3) = \max_{x_3 \in D_3(s_3)} d_3(s_3, u_3) = \max\{x_3\} = s_3$$

及最优解 $x_3^* = s_3$

例 2

- (续)

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{x_2 \in D_2(s_2)} \{d_2(s_2, u_2) \cdot f_3(s_3)\} \\ &= \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{x_2^2 \cdot f_3(s_3)\} \\ &= \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{x_2^2 \cdot (s_2 - x_2)\} \\ &= \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{h_2(s_2, x_2)\} \end{aligned}$$

由 $\frac{dh_2}{dx_2} = 2x_2 s_2 - 3x_2^2 = 0$ 得 $x_2 = \frac{2}{3}s_2$，$x_2 = 0$ (舍去)

又 $\frac{d^2h_2}{dx_2^2} = 2s_2 - 6x_2$，而 $\frac{d_2^h}{dx_2^2}\,|_{x_2=\frac{2}{3}s_2} = -2s_2 < 0$，故 $x_2 = \frac{2}{3}s_2$ 为极大值点，则

$$f_2(s_2) = \frac{4}{27}s_2^3,\ x_2^* = \frac{2}{3}s_2$$

例 2

- (续)

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{x_1 \in D_1(s_1)} \{d_1(s_1, u_1) \cdot f_2(s_2)\} \\ &= \max_{0 \le x_1 \le s_1} \{x_1 \cdot f_2(s_2)\} \\ &= \max_{0 \le x_1 \le s_1} \{x_1 \cdot \frac{4}{27}(s_1 - x_1)^3\} \\ &= \max_{0 \le x_1 \le s_1} \{h_1(s_1, x_1)\} \end{aligned}$$

同理，利用微分法易知

$$f_1(s_1) = \frac{1}{64} s_1^4, \ x_1^* = \frac{1}{4} s_1$$

例 2

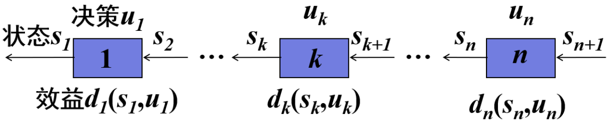
- (续) 由于已知 $s_1 = c$，故按计算的顺序反推可得

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{1}{4}s_1,\ f_1(c) = \frac{1}{64}c^4 \\
x_2^* &= \frac{2}{3}s_2 = \frac{1}{2}c,\ f_2(s_2) = \frac{1}{16}c^3 \\
x_3^* &= \frac{1}{4}c,\ f_3(s_3) = \frac{1}{4}c
\end{aligned}
$$

因此，目标函数的最大值为 $f_1(c) = \frac{1}{64}c^4$

顺序解法

- 寻优的方向与多阶段决策过程的实际行进方向相同
- 从问题的第 1 阶段开始逐段向后递推，计算后一阶段要用到前一阶段的求优结果，最后一段计算的结果就是全过程的最优结果，称为顺序解法
- 将逆序解法时的 n 阶段决策过程的箭头倒转过来即可，将 s_{k+1} 看作输入，将 s_k 看作输出



- 状态变换是逆序解法时的逆变换，记 $s_k = T_k(s_{k+1}, u_k)$
- 设已知终止状态为 s_{n+1}，并假定最优指标函数 $f_k(s)$ 表示第 k 阶段末的结束状态为 s 从 1 阶段到 k 阶段所得到的最大效益

- 从第 1 阶段开始，有

$$f_1(s_2) = \max_{u_1 \in D_1(s_1)} d_1(s_1, u_1)$$

其中 $s_1 = T_1(s_2, u_1)$。通过计算得到最优解 $u_1 = u_1(s_2)$ 和最优值 $f_1(s_2)$

- 在第 2 阶段，有

$$f_2(s_3) = \max_{u_2 \in D_2(s_2)} \{d_2(s_2, u_2) * f_1(s_2)\}$$

- 如此类推，直到第 n 阶段，有

$$f_n(s_{n+1}) = \max_{u_n \in D_n(s_n)} \{d_n(s_n, u_n) * f_{n-1}(s_n)\}$$

- 由于 s_{n+1} 已知，则 $u_n = u_n(s_{n+1})$ 和 $f_n(s_{n+1})$ 确定。按过程的相反顺序推算下去，就可逐步求出每段的决策及效益

例 2

- 用顺序解法求解下面问题

$$\max\ z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c\ (c > 0) \\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

- 状态变量: s_1, s_2, s_3, s_4，并记 $s_4 = c$
- 决策变量: x_1, x_2, x_3
- 阶段指标函数: $d_k(s_k, u_k) = x_1, x_2^2, x_3$
- 过程指标函数: $V_{1,3} = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$

例 2

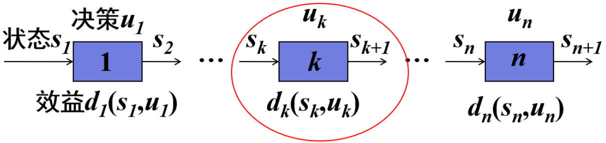
- 分析: 设 $s_3 + x_3 = s_4 = c$，$s_2 + x_2 = s_3$，$s_2 = x_1$。状态转移方程为 $s_k = T_k(s_{k+1}, u_k)$，有

$$s_2 = x_1,\ 0 \le x_2 \le s_3,\ 0 \le x_3 \le s_4 = c$$

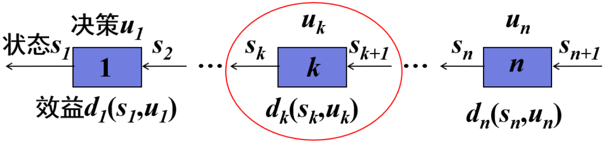
- 用顺序解法，从前向后依次有
  - $f_1(s_2) = \max\limits_{x_1 = s_2} \{x_1\} = s_2$, 最优解 $x_1^* = s_2$
  - $f_2(s_3) = \max\limits_{0 \le x_2 \le s_3} \{x_2^2 \cdot f_1(s_2)\} = \frac{4}{27} s_3^3$, 最优解 $x_2^* = \frac{2}{3} s_3$
  - $f_3(s_4) = \max\limits_{0 \le x_3 \le s_4} \{x_3 \cdot f_2(s_3)\} = \frac{1}{64} s_4^4$, 最优解 $x_3^* = \frac{1}{4} s_4$
- 由于 $s_4 = c$，可得最优解 $x_1^* = \frac{1}{4}c$，$x_2^* = \frac{1}{2}c$，$x_3^* = \frac{1}{4}c$，最大值为 $\max\ z = \frac{1}{64}c^4$

逆序与顺序解法的区别

- 状态转移方式不同
  - 逆序解法：状态 s_k 到 s_{k+1} 的状态转移方程为 $s_{k+1} = T_k(s_k, u_k)$



  - 顺序解法：状态 s_{k+1} 到 s_k 的状态转移方程为 $s_k = T_k(s_{k+1}, u_k)$



逆序与顺序解法的区别

- 指标函数的定义不同
  - 逆序解法
    - 最优指标函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 段从状态 s_k 出发到终点后部子过程最优效益值
    - $f_1(s_1)$ 是整体最优函数值
  - 顺序解法
    - 最优指标函数 $f_k(s_{k+1})$ 表示第 k 段从起点到状态 s_{k+1} 的前部子过程最优效益值
    - $f_n(s_{n+1})$ 是整体最优函数值

逆序与顺序解法的区别

- 基本方程形式不同——当指标函数为阶段指标和形式
  - 在逆序解法中，$v_{k,n}=\sum\limits_{j=k}^{n} v_j(s_j,u_j)$，则基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\mathop{\mathrm{opt}}\limits_{u_k\in D_k}\{v_k(s_k,u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\},\ k=n,\ldots,1 \\ f_{n+1}(s_{n+1})=0 \end{cases}$$

  - 在顺序解法中，$v_{1,k}=\sum\limits_{j=1}^{k} v_j(s_{j+1},u_j)$，基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1})=\mathop{\mathrm{opt}}\limits_{u_k\in D_k}\{v_k(s_{k+1},u_k)+f_{k-1}(s_k)\},\ k=1,\ldots,n \\ f_0(s_1)=0 \end{cases}$$

逆序与顺序解法的区别

- 基本方程形式不同——当指标函数为阶段指标积形式
  - 在逆序解法中，$v_{k,n} = \prod_{j=k}^{n} v_j(s_j, u_j)$，则基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k}{\text{opt}} \{v_k(s_k, u_k) \cdot f_{k+1}(s_{k+1})\}, \ k = n, \ldots, 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 1 \end{cases}$$

  - 在顺序解法中，$v_{1,k} = \prod_{j=1}^{k} v_j(s_{j+1}, u_j)$，基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \underset{u_k \in D_k}{\text{opt}} \{v_k(s_{k+1}, u_k) \cdot f_{k-1}(s_k)\}, \ k = 1, \ldots, n \\ f_0(s_1) = 1 \end{cases}$$

例 1

- 某公司有资金 10 万元, 若投资项目 i $(i=1,2,3)$ 的投资额为 x_i $(i=1,2,3)$ 时，其收益分别为

$$g_1(x_1)=4x_1,\ g_2(x_2)=9x_2,\ g_3(x_3)=2x_3^2$$

问应如何分配投资数额才能使总收益最大

- 状态变量: s_k 表示第 k 段可以投资于第 k 项到第 3 个项目的资金
- 决策变量: x_k 表示决定给第 k 个项目投资的资金
- 状态转移方程: $s_{k+1}=s_k-x_k$
- 最优指标函数: $f_k(s_k)$
- 基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}\{g_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\},\ k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=0 \end{cases}$$

例 1：逆序解法

- 当 $k=3$ 时，$f_3(s_3)=\max\limits_{0\le x_3\le s_3}\{2x_3^2\}=2s_3^2$，最优解 $x_3^*=s_3$
- 当 $k=2$ 时，

$$
\begin{aligned}
f_2(s_2) &= \max_{0\le x_2\le s_2}\{9x_2+f_3(s_3)\} \\
&= \max_{0\le x_2\le s_2}\{9x_2+2(s_2-x_2)^2\} \\
&= \max_{0\le x_2\le s_2}\{h_2(s_2,x_2)\}
\end{aligned}
$$

由 $\frac{dh_2}{dx_2}=9-4(s_2-x_2)=0$ 得 $x_2=s_2-\frac{9}{4}$。又 $\frac{d^2h_2}{dx_2^2}=4>0$，故 $x_2=s_2-\frac{9}{4}$ 为极小值点。极大值在 $[0,s_2]$ 端点取得：$f_2(0)=2s_2^2$。令 $f_2(0)=f_2(s_2)$ 时，解得 $s_2=\frac{9}{2}$， $f_2(s_2)=9s_2$

- 当 $s_2>\frac{9}{2}$，$f_2(0)>f_2(s_2)$，则 $x_2^*=0$
- 当 $s_2<\frac{9}{2}$，$f_2(0)<f_2(s_2)$，则 $x_2^*=s_2$

例 1: 逆序解法

- 当 $k=1$ 时, 有

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le s_1}\{4x_1+f_2(s_2)\}$$

- 当 $f_2(s_2)=9s_2$ 时，有

$$\begin{aligned} f_1(10) &= \max_{0\le x_1\le 10}\{4x_1+9(s_1-x_1)\} \\ &= \max_{0\le x_1\le s_1}\{9s_1-5x_1\} \end{aligned}$$

易知，$x_1^*=0$, $f_1(s_1)=9s_1$。但此时 $s_2=s_1-x_1=10-0=10>\frac{9}{2}$，与 $s_2<\frac{9}{2}$ 矛盾，所以舍去

例 1：逆序解法

- 当 $f_2(s_2) = 2s_2^2$ 时，有

$$
\begin{aligned}
f_1(10) &= \max_{0 \le x_1 \le 10} \{4x_1 + 2(s_1 - x_1)^2\} \\
&= \max_{0 \le x_1 \le 10} \{h_1(s_1, x_1)\}
\end{aligned}
$$

由 $\frac{dh_1}{dx_1} = 4x_1 + 4(s_1 - x_1)(-1) = 0$，解得 $x_1 = s_1 - 1$，而 $\frac{d^2h_1}{dx_1^2} = 1 > 0$，所以 $x_1 = s_1 - 1$ 是极小点

比较 $[0, 10]$ 两个端点，$x_1 = 0$, $f_1(0) = 200$; $x_1 = 10$, $f_1(10) = 40$，所以 $x_1^* = 0$

- 再由状态转移方程顺推 $s_2 = s_1 - x_1^* = 10 - 0 = 10$，因为 $s_2 > \frac{9}{2}$，所以 $x_2^* = 0$, $s_3 = s_2 - x_2^* = 10 - 0 = 10$，于是 $x_3^* = s_3 = 10$

- 最优投资方案为全部资金投于第 3 个项目，可得最大收益 200 万元

例 1: 顺序解法

- 阶段划分和决策变量的设置同逆序解法，令状态变量 s_{k+1} 表示可用于第 1 到第 k 个项目投资的金额，则有

$$s_4 = 10,\ s_3 = s_4 - x_3,\ s_2 = s_3 - x_2,\ s_1 = s_2 - x_1$$

即态转移方程为 $s_k = s_{k+1} - x_k$

- 令最优指标函数 $f_k(s_{k+1})$ 表示第 k 段投资额为 s_{k+1} 时第 1 到第 k 个项目所获得的最大收益。此时顺序解法的基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_{k+1}} \{g_k(s_k) + f_{k-1}(s_k)\},\ k = 1, 2, 3 \\ f_0(s_1) = 0 \end{cases}$$

例 1: 顺序解法

- 当 $k=1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_1(s_2) &= \max_{0\le x_1\le s_2}\{g_k(x_1)+f_{k-1}(s_k)\} \\ &= \max_{0\le x_1\le s_2}\{4x_1\} \\ &= 4s_2 \end{aligned}$$

最优解 $x_1^* = s_2$

- 当 $k=2$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_2(s_3) &= \max_{0\le x_2\le s_3}\{9x_2+f_1(s_2)\} \\ &= \max_{0\le x_2\le s_3}\{9x_2+4(s_3-x_2)\} \\ &= \max_{0\le x_2\le s_3}\{5x_2+4s_3\} \\ &= 9s_3 \end{aligned}$$

最优解 $x_2^* = s_3$

例 1: 顺序解法

- 当 $k=3$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_3(s_4) &= \max_{0\le x_3\le s_4} \{2x_3^2 + f_2(s_3)\} \\ &= \max_{0\le x_3\le s_4} \{2x_3^2 + 9(s_4 - s_3)\} \\ &= \max_{0\le x_3\le s_4} \{h(s_4, x_3)\} \end{aligned}$$

由 $\frac{dh}{dx_3} = 4x_3 - 9 = 0$ 得 $x_3 = \frac{9}{4}$

又 $\frac{d^2h}{dx_3^2} = 4 > 0$, 故 $x_3 = \frac{9}{4}$ 为极小值点

极大值只可能在 $[0, s_4]$ 端点取得: $x_3 = 0, f_3(0) = 90$, $x_3 = 10, f_3(10) = 200$,

所以 $x_3^* = 10$

例 1: 顺序解法

- 再由状态转移方程逆推
  - $s_3 = x_1^* = 10 - x_3^* = 0, \ x_2^* = 0$
  - $s_2 = s_3 - x_2^* = 0, \ x_1^* = 0$
- 优投资方案为全部资金投于第 3 个项目，可得最大收益 200 万元
- 与逆序解法结果相同，但解法简单（为什么）

课堂练习 1

- **用逆序解法求解下面问题（P219，习题 7.8）**

$$\max\ z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 48 \\ x_i \text{ 是正数 } (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

- $x_1 = x_2 = x_3 = 16,\ z^* = 4096$

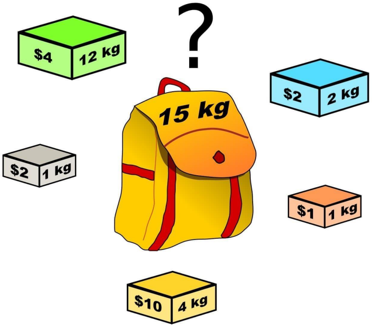
小结

- 动态规划建模步骤
- 动态规划基本解法
  - 逆序解法
  - 顺序解法
- 逆序解法和顺序解法的区别
  - 状态转移方式不同
  - 指标函数的定义不同
  - 基本方程形式不同
- 课后作业: P219, 习题 7.9(1)

目录

背包问题

- 一位旅行者携带背包去登山，已知能承受的背包重量为 $a$kg，现有 n 种可供选择的物品，第 i 种物品的单件重量为 $a_i$kg，其价值是携带数量 x_i 的函数 $c_i(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$



- 问旅行者应如何选择物品的件数使总价值最大

背包问题

- 设 x_i 为第 i 种物品装入的件数，则背包问题可归结为整数规划模型

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \le a \\ x_i \ge 0 \text{ 且为整数 } (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

动态规划顺序解法

- 阶段: 将可装入物品按 $1,\ldots,n$ 排序，每段装一种物品，共划分为 n 个阶段，即 $k=1,\ldots,n$
- 状态变量: 在第 k 段开始时，背包中允许装入前 k 种物品的总重量为 s_{k+1}
- 决策变量: 装入第 k 种物品的件数，记 x_k
- 状态转移方程: $s_k = s_{k+1} - a_k x_k$
- 允许决策集合: $D_k(s_{k+1}) = \{x_k \mid 0 \leq x_k \leq [s_{k+1}/a_k],\ x_k\text{为整数}\}$
- 最优指标函数: 在背包中允许装入物品的总重量不超过 s_{k+1} kg，采用最优策略只装前 k 种物品时的最大价值，记 $f_k(s_{k+1})$

- 顺序递推方程

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max\limits_{x_k=0,1,\ldots,[s_{k+1}/a_k]} \{c_k(x_k) + f_{k-1}(s_{k+1} - a_k x_k)\} \\ f_0(s_1) = 0 \end{cases}$$

- 用前向动态规划方法逐步计算出 $f_1(s_2), f_2(s_3), \ldots, f_n(s_{n+1})$ 及相应的决策函数 $x_1(s_1), x_2(s_3), \ldots, x_n(s_{n+1})$
- 最后得到的 $f_n(a)$ 即为所求的最大价值，相应的最优策略则由反推计算得出
- 当 x_i 仅表示装入 (取 1) 和不装 (取 0) 第 i 种物品，即 0-1 背包问题

例 1

- 有一辆最大货运量为 10t 的卡车，用以装载 3 种货物，每种货物的单位重量及相应单位价值如下。应如何装载可使总价值最大

货物编号 i	1	2	3
单位重量 $a_i(t)$	3	4	5
单位价值 c_i	4	5	6

- 设第 i 种货物装载的件数为 x_i $(i = 1, 2, 3)$，则数学模型为

$$\max\ z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

- 确定阶段, 状态变量, 决策变量, 状态转移方程，基本方程等

例 1

- 当 $k=1$ 时，有

$$f_1(s_2) = \max_{0\le 3x_1\le s_2，x_1\text{为整数}} \{4x_1\}$$

或

$$f_1(s_2) = \max_{0\le x_1\le s_2/3，x_1\text{为整数}} \{4x_1\} = 4[s_2/3]$$

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(s_2)$	0	0	0	4	4	4	8	8	8	12	12
x_1^*	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3

例 1

- 当 $k=2$ 时，有

$$f_2(s_3)=\max_{0\le 4x_2\le s_3，x_2\text{为整数}}\{5x_2+f_1(s_3-4x_2)\}$$

或

$$f_2(s_3)=\max_{0\le x_2\le s_3/4，x_2\text{为整数}}\{5x_2+f_1(s_3-4x_2)\}$$

s_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_2	0	0	0	0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1 2	0 1 2	0 1 2
$c_2+f_1(s_2)$	0	0	0	4	4 5	4 5	8 5	8 9	8 9 10	12 9 10	12 13 10
$f_2(s_3)$	0	0	0	4	5	5	8	9	10	12	13
x_2^*	0	0	0	0	1	1	0	1	2	0	1

例 1

- 当 $k=3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
f_3(s_4) &= \max_{0\le x_3\le[s_4/5]} \{6x_3 + f_2(s_4 - 5x_3)\} \\
&= \max_{x_3=0,1,2} \{3x_3 + f_2(10 - 5x_3)\} \\
&= \max \{f_2(10), 6 + f_2(5), 12 + f_2(0)\} \\
&= \max \{13, 6+5, 12+0\} \\
&= 13
\end{aligned}
$$

- 最大价值为 $z^* = 13$
- $x_3^* = 0$，倒推可得 $x_2^* = 1, x_1^* = 2$

小结

- 背包问题
- 生产经营问题
- 设备更新问题
- 复合系统工作可靠性问题
- 货郎担问题
- 马氏决策规划

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈