第二章 最优性理论

修贤超

https://xianchaoxiu.github.io

目录

最优化问题解的存在性

- 考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

  - 首先分析最优解的存在性
  - 然后考虑如何求出其最优解

- (Weierstrass 定理) 紧集上的连续函数一定存在最大 (最小) 值
- 而在许多实际问题中, 定义域可能不是紧的, 目标函数也不一定连续

推广的 Weierstrass 定理

- 若函数 $f : \mathcal{X} \to (-\infty, +\infty]$ 适当且闭，且以下条件中任意一个成立
  - $\mathrm{dom}\ f = \{x \in \mathcal{X} : f(x) < +\infty\}$ 是有界的
  - 存在一个常数 $\bar{\gamma}$ 使得下水平集

    $$C_{\bar{\gamma}} = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq \bar{\gamma}\}$$

    是非空且有界的
  - f 是强制的，即对于任一满足 $\|x^k\| \to +\infty$ 的点列 $\{x^k\} \subset \mathcal{X}$，都有

    $$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = +\infty$$

  则函数 f 的最小值点集 $\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq f(y), \forall y \in \mathcal{X}\}$ 非空且紧
- 三个条件在本质上都是保证 $f(x)$ 的最小值不能在无穷远处取到

例子

- 当定义域不是有界闭集时，对于强制函数

$$f(x) = x^2,\ x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$$

其全局最优解一定存在

- 对于适当且闭的函数

$$f(x) = e^{-x},\ x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$$

不满足三个条件中任意一个，因此不能断言其全局极小值点存在

目录

无约束可微问题的最优性理论

- 无约束**可微**优化问题通常表示为

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) \tag{1}$$

- 对于可微函数 f 和点 $x \in \mathbb{R}^n$, 如果存在向量 d 满足

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

  那么称 d 为 f 在点 x 处的一个**下降方向**

- 一阶最优性条件是利用梯度 (一阶) 信息来判断给定点的最优性
- 在局部最优点处不能有下降方向

一阶必要条件

- 假设 f 在全空间 $\mathbb{R}^n$ 可微. 如果 x^* 是 (1) 的一个局部极小点, 那么

$$\nabla f(x^*) = 0$$

证明 任取 $v \in \mathbb{R}^n$, 考虑 f 在点 $x = x^*$ 处的泰勒展开

$$\frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^\top \nabla f(x^*) + o(1)$$

根据 x^* 的最优性, 分别对 t 取点 0 处的左、右极限可知

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^\top \nabla f(x^*) \geq 0$$
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} = v^\top \nabla f(x^*) \leq 0$$

- 称满足 $\nabla f(x) = 0$ 的点 x 为 f 的稳定点 (或驻点、临界点)

二阶最优性条件

- 对于 $f(x)=x^3$, 满足 $f'(x)=0$ 的点为 $x^*=0$, 但其不是局部最优解
- 假设 f 在点 x 的一个开邻域内是二阶连续可微的，考虑

$$f(x+d)=f(x)+\nabla f(x)^\top d+\frac{1}{2}d^\top\nabla^2 f(x)d+o(\|d\|^2)$$

  则以下最优性条件成立

  - (二阶必要条件) 若 x^* 是 f 的一个局部极小点, 则

$$\nabla f(x^*)=0, \nabla^2 f(x^*)\succeq 0$$

  - (二阶充分条件) 若满足

$$\nabla f(x^*)=0, \nabla^2 f(x^*)\succ 0$$

    则 x^* 是 f 的一个局部极小点

证明

- **必要性** 若 $\nabla^2 f(x^*)$ 有负的特征值 $\lambda_- < 0$, 设 $\nabla^2 f(x^*)d = \lambda_- d$, 则

$$\frac{f(x^*+d)-f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{1}{2}\frac{d^\top}{\|d\|}\nabla^2 f(x^*)\frac{d}{\|d\|} + o(1) = \frac{1}{2}\lambda_- + o(1)$$

  当 $\|d\|$ 充分小时, $f(x^*+d) < f(x^*)$, 这和点 x^* 的最优性矛盾

- **充分性** 由 $\nabla f(x^*) = 0$ 时的二阶展开

$$\frac{f(x^*+d)-f(x^*)}{\|d\|^2} = \frac{d^\top \nabla^2 f(x^*)d + o(\|d\|^2)}{\|d\|^2} \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min} + o(1)$$

  当 $\|d\|$ 充分小时有 $f(x^*+d) \geq f(x^*)$, 即二阶充分条件成立

实例：实数情形的相位恢复

- 考虑

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) = \sum_{i=1}^m r_i^2(x)$$

其中 $r_i(x) = (a_i^\top x)^2 - b_i^2, i = 1, 2, \cdots, m$

- 计算梯度和的海瑟矩阵

$$\nabla f(x) = 2\sum_{i=1}^m r_i(x)\nabla r_i(x) = 4\sum_{i=1}^m ((a_i^\top x)^2 - b_i^2)(a_i^\top x)a_i$$

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m (12(a_i^\top x)^2 - 4b_i^2)a_i a_i^\top$$

目录

无约束不可微问题的最优性理论

- 考虑不可微优化问题
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) \tag{2}$$
- 假设 f 是适当且**凸**的函数, 则 x^* 为 (2) 的全局极小点当且仅当 $0 \in \partial f(x^*)$
  - **必要性** 因 x^* 为全局极小点, 有
  $$f(y) \geq f(x^*) = f(x^*) + 0^\top (y - x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$
  $$\Longrightarrow \quad 0 \in \partial f(x^*)$$
  - **充分性** 如果 $0 \in \partial f(x^*)$, 那么根据次梯度的定义
  $$f(y) \geq f(x^*) + 0^\top (y - x^*) = f(x^*), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$
  $$\Longrightarrow \quad x^* \text{ 为一个全局极小点}$$

复合优化问题的一阶必要条件

- 考虑一般复合优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + h(x) \tag{3}$$

其中 f 为光滑函数 (可能非凸), h 为凸函数 (可能非光滑)

- **定理** 令 x^* 为复合优化问题 (3) 的一个局部极小点, 那么

$$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$$

- 由于目标函数可能是整体非凸的，因此一般没有一阶充分条件

实例: ℓ_1 范数优化问题

- 考虑

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x) = f(x) + \mu\|x\|_1$$

- $\|x\|_1$ 不是可微的, 但可以计算其次微分

$$\partial_i\|x\|_1 = \begin{cases} \{1\}, & x_i > 0 \\ [-1, 1], & x_i = 0 \\ \{-1\}, & x_i < 0 \end{cases}$$

- 若 x^* 是局部最优解, 则 $-\nabla f(x^*) \in \mu\partial\|x^*\|_1$, 即

$$\nabla_i f(x^*) = \begin{cases} -\mu, & x_i^* > 0 \\ a \in [-\mu, \mu], & x_i^* = 0 \\ \mu, & x_i^* < 0 \end{cases}$$

总结

- 无约束优化问题及其最优性条件

问题	一阶条件	二阶条件
可微问题	$\nabla f(x^*) = 0$ (必要)	必要/充分
凸问题	$0 \in \partial f(x^*)$ (充要)	–
复合优化问题	$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$ (必要)	–
非凸非光滑	$0 \in \partial f(x^*)$ (必要)	–

目录

对偶理论

- 一般的约束优化问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) \le 0,\ i \in \mathcal{I} \\
& c_i(x) = 0,\ i \in \mathcal{E}
\end{aligned}
$$

- 可行域定义为

$$
\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \le 0,\ i \in \mathcal{I}\ \text{且}\ c_i(x) = 0,\ i \in \mathcal{E}\}
$$

- 通过将 $\mathcal{X}$ 的示性函数加到目标函数中可以得到无约束优化问题, 但是转化后问题的目标函数是**不连续的、不可微的以及不是有限的**

- 拉格朗日函数 $L:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$L(x,\lambda,\nu) = f(x) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \nu_i c_i(x)$$

  - λ_i 为第 i 个不等式约束对应的拉格朗日乘子
  - ν_i 为第 i 个等式约束对应的拉格朗日乘子

- 拉格朗日对偶函数 $g:\ \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p \to [-\infty,+\infty)$

$$\begin{aligned} g(\lambda,\nu) &= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \ L(x,\lambda,\nu) \\ &= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left(f(x) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \nu_i c_i(x)\right) \end{aligned}$$

拉格朗日对偶问题

- 拉格朗日对偶问题

$$\max_{\lambda \geq 0, \nu} g(\lambda, \nu) = \max_{\lambda \geq 0, \nu} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu)$$

- 设 p^* 是原始问题的最优解， q^* 是对偶问题的最优解
- 弱对偶性 $\quad q^* \leq p^*$
  - 对凸问题与非凸问题都成立
  - 可导出复杂问题的非平凡下界
- 强对偶性 $\quad q^* = p^*$
  - (通常) 对凸问题成立
  - 称保证凸问题强对偶性成立的条件为约束品性

实例：线性规划问题的对偶

- 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- 拉格朗日函数

$$L(x, s, \nu) = c^\top x + \nu^\top (Ax - b) - s^\top x = -b^\top \nu + (A^\top \nu - s + c)^\top x$$

- 对偶函数

$$g(s, \nu) = \inf_{x} \ L(x, s, \nu) = \begin{cases} -b^\top \nu, & A^\top \nu - s + c = 0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

实例：线性规划问题的对偶

- 对偶问题

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{s,\nu} & -b^\top \nu \\ \text{s.t.} & A^\top \nu - s + c = 0 \\ & s \geq 0 \end{array} \quad \overset{y=-\nu}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rl} \max\limits_{s,y} & b^\top y \\ \text{s.t.} & A^\top y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

- 若保留约束 $x \geq 0$, 则拉格朗日函数为

$$L(x,y) = c^\top x - y^\top (Ax - b) = b^\top y + (c - A^\top y)^\top x$$

- 对偶问题需要将 $x \geq 0$ 添加到约束里

$$\max_y \left\{ \inf_x \; b^\top y + (c - A^\top y)^\top x \quad \text{s.t.} \quad x \geq 0 \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} \max\limits_{y} & b^\top y \\ \text{s.t.} & A^\top y \leq c \end{array}$$

实例: 线性规划问题的对偶

- 将 $\max\ b^\top y$ 改写为 $\min\ -b^\top y$, 对偶问题的拉格朗日函数为

$$L(y,x) = -b^\top y + x^\top (A^\top y - c) = -c^\top x + (Ax - b)^\top y$$

- 得到对偶函数

$$g(x) = \inf_y\ L(y,x) = \begin{cases} -c^\top x, & Ax = b \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 相应的对偶问题是

$$\begin{aligned} \max_x \quad & -c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- 该问题与原始问题完全等价, 表明线性规划问题与其对偶问题互为对偶

实例: ℓ_1 正则化问题的对偶

- 考虑

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \mu\|x\|_1$$

- 令 $r = Ax - b$, 问题等价于

$$\begin{aligned} \min_{x,r} \quad & \frac{1}{2}\|r\|^2 + \mu\|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & r = Ax - b \end{aligned}$$

- 拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(x,r,\lambda) &= \frac{1}{2}\|r\|^2 + \mu\|x\|_1 - \langle \lambda, Ax - b - r\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|r\|^2 + \lambda^\top r + \mu\|x\|_1 - (A^\top\lambda)^\top x + b^\top\lambda \end{aligned}$$

实例: ℓ_1 正则化问题的对偶

- 对偶函数

$$g(\lambda) = \inf_{x,r} \ L(x, r, \lambda) = \begin{cases} b^\top \lambda - \frac{1}{2}\|\lambda\|^2, & \|A^\top \lambda\|_\infty \le \mu \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- 对偶问题

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^\top \lambda - \frac{1}{2}\|\lambda\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \|A^\top \lambda\|_\infty \le \mu \end{aligned}$$

实例：半定规划问题的对偶问题

- 考虑

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathcal{S}^n} \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i, \ i = 1, 2, \cdots, m \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

- 拉格朗日函数

$$L(X, y, S) = \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^{m} y_i(\langle A_i, X \rangle - b_i) - \langle S, X \rangle, \quad S \succeq 0$$

实例：半定规划对偶问题的对偶问题

- **对偶函数**

$$g(y,S)=\inf_X L(X,y,S)=\begin{cases} b^\top y, & \sum_{i=1}^m y_iA_i-C+S=0 \\ -\infty, & \text{其他} \end{cases}$$

- **对偶问题**

$$\begin{aligned} \min_{y\in\mathbb{R}^m} \quad & -b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m y_iA_i-C+S=0 \\ & S\succeq 0 \end{aligned}$$

目录

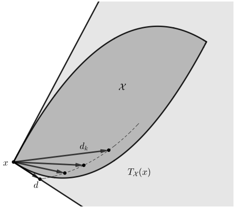
切锥

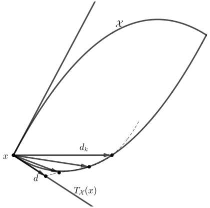
- 给定可行域 $\mathcal{X}$ 及 $x \in \mathcal{X}$, 若存在序列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}, \lim_{k\to\infty} z_k = x$ 以及正标量序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to 0$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k - x}{t_k} = d$$

则称向量 d 为 $\mathcal{X}$ 在点 x 处的一个**切向量**

- 所有点 x 处的切向量构成的集合称为**切锥**, 用 $T_{\mathcal{X}}(x)$ 表示





几何最优性条件

- **一般优化问题**

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) \le 0,\ i\in\mathcal{I} \\
& c_i(x) = 0,\ i\in\mathcal{E}
\end{aligned} \tag{4}
$$

- **定理** 假设可行点 x^* 是问题 (4) 的一个局部极小点. 如果 $f(x)$ 和 $c_i(x),\ i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{E}$ 在点 x^* 处是可微的, 那么

$$
d^\top \nabla f(x^*) \ge 0, \quad \forall d \in T_{\mathcal{X}}(x^*)
$$

等价于

$$
T_{\mathcal{X}}(x^*) \cap \{d \mid \nabla f(x^*)^\top d < 0\} = \emptyset
$$

线性化可行锥

- 定义 对于可行点$x \in \mathcal{X}$, 定义积极集 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x) = 0\}$, 点 x 处的线性化可行方向锥定义为

$$\mathcal{F}(x) = \left\{ d \;\middle|\; \begin{array}{l} d^\top \nabla c_i(x) = 0, \ \forall\, i \in \mathcal{E} \\ d^\top \nabla c_i(x) \le 0, \ \forall\, i \in \mathcal{A}(x) \cap \mathcal{I} \end{array} \right\}$$

- 命题 设 $c_i(x), i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ 一阶连续可微, 则对任意可行点 x 有

$$T_{\mathcal{X}}(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$$

- 线性可行化方向锥容易计算, 但不能反映可行域 $\mathcal{X}$ 的本质特征
- 切锥能反映可行域 $\mathcal{X}$ 的本质特征, 但不容易计算
- 引入约束品性, 确保 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$, 从而用 $\mathcal{F}(x)$ 取代 $T_{\mathcal{X}}(x)$

KKT 条件

- **定理** 假设 x^* 是一般优化问题 (4) 的一个局部最优点

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \le 0,\ i \in \mathcal{I} \\ & c_i(x) = 0,\ i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

如果 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$ 成立，那么存在拉格朗日乘子 λ_i^* 使得

$$\begin{aligned} \text{稳定性条件} \quad & \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0 \\ \text{原始可行性条件} \quad & c_i(x^*) = 0,\ \forall i \in \mathcal{E} \\ \text{原始可行性条件} \quad & c_i(x^*) \le 0,\ \forall i \in \mathcal{I} \\ \text{对偶可行性条件} \quad & \lambda_i^* \ge 0,\ \forall i \in \mathcal{I} \\ \text{互补松弛条件} \quad & \lambda_i^* c_i(x^*) = 0,\ \forall i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

临界锥

- 若 x^* 是满足 KKT 条件的点, 假设 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$, 则 $\forall d \in \mathcal{F}(x^*)$ 有

$$d^\top \nabla f(x^*) = -\sum_{i\in\mathcal{E}} \underbrace{\lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*)}_{=0} - \sum_{i\in\mathcal{A}(x^*)\cap\mathcal{I}} \underbrace{\lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*)}_{\leq 0} \geq 0$$

- **定义** 设(x^*, λ^*) 是满足 KKT 条件的 KKT 对, 定义**临界锥**为

$$\mathcal{C}(x^*, \lambda^*) = \{d \in \mathcal{F}(x^*) \mid d^\top \nabla c_i(x^*) = 0,\ \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ 且 } \lambda_i^* > 0\}$$

- 当 $d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$ 时, $\forall i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ 有 $\lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^\top d = 0$, 故

$$d^\top \nabla f(x^*) = \sum_{i\in\mathcal{E}\cup\mathcal{I}} \lambda_i^* d^\top \nabla c_i(x^*) = 0$$

二阶最优性条件

- **定理 (二阶必要条件)** 假设 x^* 是一个局部最优解, 且 $T_{\mathcal{X}}(x^*) = \mathcal{F}(x^*)$. 令 λ^* 为相应的拉格朗日乘子, 即 (x^*, λ^*) 满足 KKT 条件, 那么

$$d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) d \geq 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$$

- **定理 (二阶充分条件)** 假设在可行点 x^* 处, 存在一个拉格朗日乘子 λ^*, 使得 (x^*, λ^*) 满足 KKT 条件. 如果

$$d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) d > 0, \quad \forall d \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*), \ d \neq 0$$

  那么 x^* 为一个严格局部极小解

- 回顾无约束优化问题的二阶最优性条件

例子

- 考虑

$$\min \quad x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 = 0$$

- 拉格朗日函数为

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1)$$

- 该问题可行域在任意一点 $x = (x_1, x_2)^\top$ 处的线性化可行方向锥为

$$\mathcal{F}(x) = \{(d_1, d_2) \mid \frac{x_1}{4} d_1 + x_2 d_2 = 0\}$$

- 根据 $\mathcal{C}(x, \lambda) = \mathcal{F}(x)$，计算出 4 个 KKT 对

$$(x^\top, \lambda) = (2, 0, -4),\ (-2, 0, -4),\ (0, 1, -1),\ (0, -1, -1)$$

例子

- 第一个 KKT 对 $y=(2,0,-4)$, 计算可得

$$\nabla^2_{xx}L(y)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix},\quad \mathcal{C}(y)=\{(d_1,d_2)\mid d_1=0\}$$

取 $d=(0,1)$, 则 $d^\top\nabla^2_{xx}L(y)d=-6<0$, 因此 y 不是局部最优点

- 第三个 KKT 对 $z=(0,1,-1)$, 计算可得

$$\nabla^2_{xx}L(z)=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathcal{C}(z)=\{(d_1,d_2)\mid d_2=0\}$$

对于任意的 $d=(d_1,0)$ 且 $d_1\neq 0$, 有 $d^\top\nabla^2_{xx}L(z)d=\frac{3}{2}d_1^2>0$, 因此 z 是一个严格局部最优点

目录

带约束凸优化问题

- 考虑带约束的凸优化问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathcal{D}} \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
& Ax = b
\end{aligned} \tag{5}
$$

  - $f(x)$ 为适当的凸函数
  - $c_i(x)$ 是凸函数且 $\mathrm{dom}\ c_i = \mathbb{R}^n$
  - 集合 $\mathcal{D}$ 表示自变量 x 的定义域，即 $\mathcal{D} = \{x \mid f(x) < +\infty\}$

Slater 约束品性与强对偶原理

- **定义** 集合 $\mathcal{D}$ 的相对内点集定义为

$$\mathrm{relint}\ \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \mid \exists\ r > 0,\ \text{使得}\ B(x,r) \cap \mathrm{affine}\ \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}\}$$

- **定义** 若对凸优化问题 (5) 存在 $x \in \mathrm{relint}\ \mathcal{D}$ 满足

$$c_i(x) < 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad Ax = b$$

则称满足 Slater 约束条件

- **定理** 若凸优化问题满足 Slater 条件, 则强对偶原理成立

一阶充要条件

- **定理** 对于凸优化问题 (5), 如果 Slater 条件成立, 那么 x^*, λ^* 分别是原始、对偶全局最优解当且仅当

$$
\begin{aligned}
\text{稳定性条件} \quad & 0 \in \partial f(x^*) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i^* \partial c_i(x^*) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i^* a_i \\
\text{原始可行性条件} \quad & Ax^* = b, \ \forall i \in \mathcal{E} \\
\text{原始可行性条件} \quad & c_i(x^*) \le 0, \ \forall i \in \mathcal{I} \\
\text{对偶可行性条件} \quad & \lambda_i^* \ge 0, \ \forall i \in \mathcal{I} \\
\text{互补松弛条件} \quad & \lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \ \forall i \in \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

实例: 仿射空间的投影问题

- 考虑

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2 \qquad \text{s.t.} \quad Ax=b$$

- 拉格朗日函数 $L(x,\lambda)=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+\lambda^\top(Ax-b)$
- KKT 条件

$$\begin{cases} x^*-y+A^\top\lambda^*=0 \\ Ax^*=b \end{cases}$$

- 第一式左右两边同时左乘 A 可得

$$Ax^*-Ay+AA^\top\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^*=(AA^\top)^{-1}(Ay-b)$$

- 将 λ^* 代回第一式可知

$$x^*=y-A^\top(AA^\top)^{-1}(Ay-b)$$

总结

- 无约束优化问题及其最优性条件

问题	一阶条件	二阶条件
可微问题	$\nabla f(x^*) = 0$ (必要)	必要/充分
凸问题	$0 \in \partial f(x^*)$ (充要)	–
复合优化问题	$-\nabla f(x^*) \in \partial h(x^*)$ (必要)	–
非凸非光滑	$0 \in \partial f(x^*)$ (必要)	–

- 约束优化问题的最优性条件和相应约束品性

问题	一阶条件	二阶条件	约束品性
一般问题	KKT 条件 (必要)	必要/充分	LICQ
凸问题	KKT 条件 (充要)	–	Slater

Q&A

Thank you!

感谢您的聆听和反馈